Unidad 3: <u>Función cuadrática</u>

Una función cuadrática es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Los puntos de la gráfica conforman una curva llamada parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$.

❖ En general: recordamos que llamamos ceros de una función a aquellos valores del dominio para los cuales se anula el valor de la función. Es decir, son las soluciones o raíces de la ecuación $f(x) = 0$.
En el caso de la función cuadrática los ceros de f son los x / $ax^2 + bx + c = 0$.
¿Qué representan en el gráfico de la parábola los ceros de la función f?

Ejercicio Nº 1

a) Considerar las siguientes funciones cuadráticas y hallar los ceros (completar cuadrados para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ en los casos que sea necesario).
b) Graficar e indicar el eje de simetría.
c) Indicar las coordenadas del punto de intersección del gráfico con eje y.

I. $f(x) = x^2 - 6x + 9$
II. $f(x) = -x^2 + 2x - 2$
III. $f(x) = 3x^2 - 2$
IV. $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$
V. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
VI. $f(x) = x^2 + 4x + 5$
VII. $f(x) = 3x^2 - 12x$
VIII. $f(x) = -x^2 + x$

Ejercicio Nº 2

a) Verificar que toda ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ se puede escribir de la siguiente forma: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (forma canónica).
b) ¿Qué representa el punto $(x_0; y_0)$ en el gráfico de la parábola?
c) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

❖ **Intervalos de postividad**

Se denomina intervalo de positividad de una función f al intervalo en el cual se verifica que ∀x del intervalo $f(x) > 0$.
En forma análoga se define intervalo de negatividad de f.
Para el caso de la función cuadrática el intervalo de positividad corresponde a todos los valores de x / $ax^2 + bx + c > 0$.

Ejercicio Nº 3

Para cada una de las funciones del ejercicio 1 realizar lo que se indica en cada ítem.
a) Escribir la ecuación canónica de la parábola asociada a cada caso, las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
b) Hallar analiticamente el conjunto imagen y los intervalos en que $f(x) \geq 0$.
c) Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

❖ Desplazamientos

Actividad

a) Representar en hoja cuadriculada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$.

Representar en el mismo gráfico, sin usar tabla de valores, $g(x) = f(x) + 1$ y $h(x) = f(x) - 2$, ambas definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Relación entre la gráfica de $f(x)$ y las de $g(x)$ y $h(x)$:
Si trasladamos la gráfica de ………… 1 unidad en el sentido positivo del eje y obtenemos la gráfica de …………… .
La gráfica de h se obtiene trasladando ………… .

b) Consideremos nuevamente $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$. Sin usar tabla de valores representar:
$p(x) = f(x-1)$ y $j(x) = f(x+1)$.
Expresar la fórmula de la función resultante.

¿Qué relación existe entre las gráficas de f, p y j?
………
………
………

En general:
Dada una función f y un número $k > 0$
a) la gráfica de g(x) = f(x) $\pm$ k se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje y
- k unidades en el sentido positivo si g(x) = f(x) + k;
- k unidades en el sentido negativo si g(x) = f(x) – k.

b) la gráfica de h(x) = f(x $\pm$ k) se obtiene desplazando la gráfica de f en la dirección del eje x.

En el caso particular de la función cuadrática podemos representar una parábola cualquiera expresada en forma canónica:

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ mediante desplazamientos de $y = ax^2$.

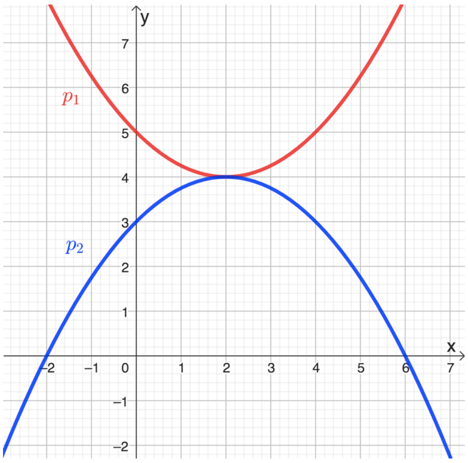
Ejemplo:
$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$
La gráfica es una parábola que se obtiene desplazando la gráfica de $y = x^2$ 2 unidades en el sentido positivo de x y 1 unidad en el sentido negativo de y.

Ejercicio Nº 4
Dadas las siguientes parábolas:

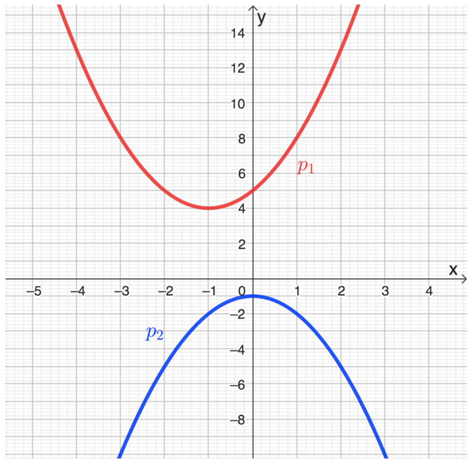
$$p_1 \to y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$
$$p_2 \to y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

donde $|a_1| = |a_2|$ hallar las ecuaciones de p_1 y p_2 teniendo en cuenta en cada caso los datos que figuran en las gráficas.

a)



b)



Ejercicio Nº 5

a) Dada la parábola $p_1 \to y = a_1(x-2)^2$:

i) hallar la ecuación de la parábola p_2 que pasa por el punto $Q = (0; 5)$ y tiene el mismo vértice que p_1;

ii) ¿cuál es el valor de a_1 si $a_2 = 2a_1$?

b) Dar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos: $A = (0; 6)$, $B = (4; -10)$ y $C = (2; 6)$ y realizar lo siguiente:

i) obtener los ceros y el vértice;

ii) graficarla;

iii) hallar su imagen;

iv) determinar en qué intervalo es positiva y decreciente simultáneamente y en cuál es negativa y creciente.

Ejercicio Nº 6

¿Qué condición deben cumplir a, h y k para que la gráfica de $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / s(x) = a(x-h)^2 + k$ sea una parábola cóncava hacia abajo y corte al eje x en dos puntos?

Ejercicio Nº 7

Considerar la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = 2(x+1)(x-3)$ y decidir, sin utilizar la forma polinómica ni la forma canónica, si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar cada una de las desiciones.

a) Las raíces de la función g son 1 y -3.

b) La función g tiene un mínimo en el punto $(1; -8)$.

c) La ordenada al origen de la función g el 6.

d) El conjunto imagen de la función g es $(-8; +\infty)$.

Ejercicio Nº 8

En cada caso, determinar la fórmula de la función cuadrática f, tal que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que verifica lo que se indica.

a) Su gráfico corta al eje x en los puntos (1 ; 0) y (3 ; 0) y su conjunto imagen es $[-2; +\infty)$.

b) $f(-2) = f(3) = 0$ y $f(0) = 4$.

c) $Im = [-5; +\infty)$ y $C^+ = (-\infty; -8) \cup (-2; +\infty)$.

d) El máximo valor de y corresponde a $x = -1$, $f(-1) = 3$ y $C^0 = \{-3; 1\}$.
e) El conjunto imagen es $(-\infty; 5]$ y $f(1) = f(-7) = -27$.

Ejercicio Nº 9
Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si es V (verdadera) o F (falsa) y justificar.

a) Si en la fórmula de una función cuadrática el término independiente es 0, la función tiene una raíz nula.
b) Si el vértice del gráfico de una función cuadrática pertenece al segundo cuadrante y el coeficiente cuadrático de la fórmula de dicha función es positivo, entonces la mencionada función no tiene raíces reales.
c) Si una función cuadrática no tiene raíces reales, su conjunto de positividad es el conjunto de los números reales.
d) Si el vértice de una parábola pertenece al eje x, entonces la función cuadrática correspondiente no tiene raíces reales.
e) Si los puntos (3 ; 7) y (–5 ; 7) pertenencen al gráfico de una función cuadrática, la ecuación de su eje de simetria es x = 0.
f) Si –2 es raíz doble de una función cuadrática, entonces el conjunto de negatividad de dicha función es el conjunto vacío.

❖ Fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado

Deduciremos una fórmula para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado o ceros de una función cuadrática en forma más práctica que completando cuadrados.

$ax^2 + bx + c = 0$ (ecuación de segundo grado)

dividiendo miembro a miembro por a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

completando cuadrados: $\underbrace{x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2}} - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para hallar esta fórmula simplemente se han resuelto en términos generales los mismos cálculos que hemos realizado para los casos particulares planteados en el ejercicio 1 con valores numéricos, pero con la ventaja de haber obtenido una expresión general en función de los parámetros a, b y c.

Ejercicio Nº 10

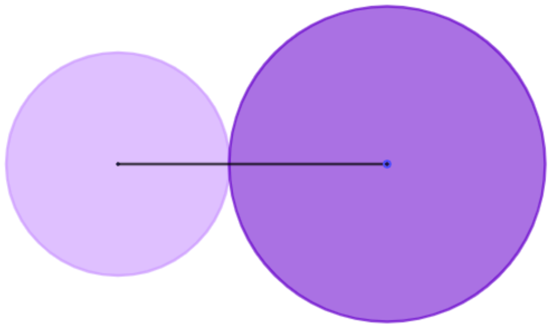
En un triángulo rectángulo, la medida de la hipotenusa es 10 cm mayor que la de uno de los catetos y la medida de este es 10 cm mayor que la del otro cateto. Calcular la medida de cada uno de los lados del triángulo rectángulo.

Ejercicio Nº 11

De todos los rectángulos de perímetro 8 hallar las dimensiones del que tiene área máxima.

Ejercicio Nº 12

En la siguiente figura, el área del círculo menor es la cuarta de la del círculo mayor.



Calcular el radio de cada círculo considerando que la distancia entre sus centros es 6 cm.

Ejercicio Nº 13

Hallar dos números cuya suma es 36 y cuyo producto es máximo.

Ejercicio Nº 14

La suma de un número y el triple de su recíproco es 4. ¿Cuál es el número?

Ejercicio Nº 15

Una compañía de TV por cable de acuerdo con un estudio de mercado sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de x pesos mensuales viene dada por la siguiente función:

$$i(x) = 500(300 - x)x \qquad \text{con} \qquad 0 < x < 300$$

a) ¿Cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo?

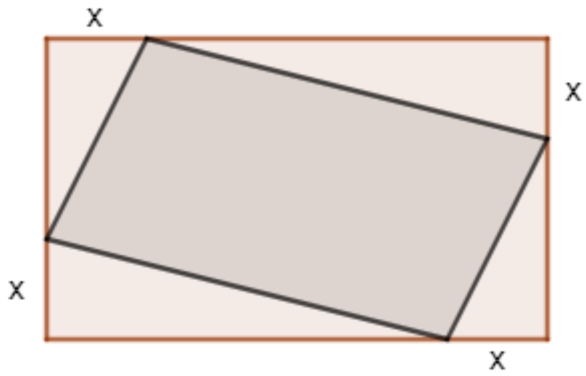
b) ¿Cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea 3437500?

Ejercicio Nº 16

Cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles mide 10 cm. La medida de la altura del lado desigual es 4 cm menor que dicho lado. Calcular la medida de la mencionada altura.

Ejercicio Nº 17

En un rectángulo de 30 cm de base y 20 cm de altura se construyen distintos cuadriláteros con vértices en los lados del rectángulo anterior de forma tal que la distancia de cada uno de esos vértices a los vértices del rectángulo mencionado sea la misma, por ejemplo:



¿Cuál es la menor área que puede tener un cuandrilátero construido como se indicó?

Ejercicio Nº 18

En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados n a los t años está dado por: $n(t) = -t^2 + 21t + 100$ con $t > 0$.

a) Calcular los valores de t para los cuales $n = 154$.

b) ¿Cuándo se extingue la población?

Ejercicio Nº 19

Un jardín circular cubierto de flores está rodeado por un camino de 2 m de ancho. ¿Cuál es el radio del jardín si el área del jardín con camino es igual a los $\frac{36}{5}$ del área del jardín?

Ejercicio Nº 20

Una cuerda para tender ropa que tiene 35 m de longitud se extiende en diagonal entre las esquinas de un patio rectagular de 98 m de perímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del patio?

Ejercicio Nº 21

Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo y cuyo perímetro total sea 12 m.

Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible. Sugerencia: utilizar como variable independiente el radio del semicírculo.

Ejercicio Nº 22

Un grupo de amigas decide comprar un regalo que cuesta $24 000. Si se agregan 4 chicas más, cada una debe pagar $1000 menos.

a) ¿Cuántas amigas van a participar ahora del regalo?

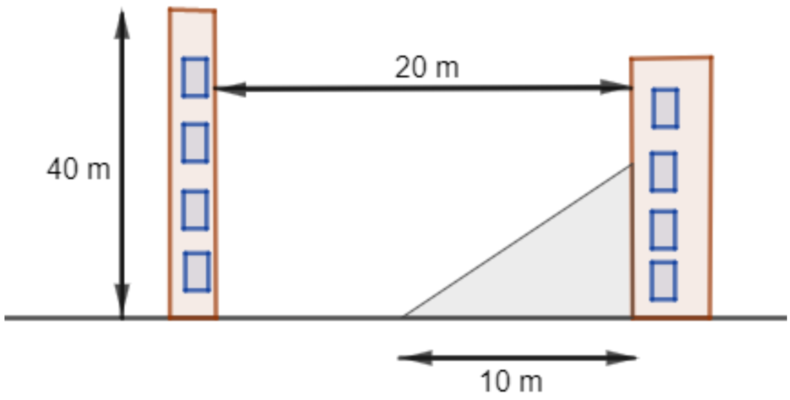
b) ¿Cuánto dinero deberá aportar cada una?

Ejercicio Nº 23

Desde lo alto de un edifício de 40 m de altura se lanza una pelota hacia la calle que describe una trayectoria parabólica. El punto más alto de dicha trayectoria se encuentra a 22,50 m por encima del lugar donde se lanzó la pelota y a 1,5 m del edifício.

Frente al edifício hay um depósito cuyos empleados utilizan una rampa mecánica para bajar y subir mercadería.

De acuerdo con los datos del esquema que figura a continuación determinar si la pelota puede o no chocar con la rampa y justificar.



Ejercicio Nº 24

Considerar un movimiento rectilíneo uniformemente variado en el cual:

La euación horaria de posición es $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

La euación horaria de velocidad es $v(t) = v_0 + at$

La euación horaria de aceleración es $a(t) = a$

Donde: $x_0 = 6m$; $v_0 = -3\frac{m}{s}$; $a = 3\frac{m}{s^2}$

a) Obtener $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

b) Graficar las tres funciones del ítem **a)** en distintos sistemas de ejes coordenados.

c) **i)** ¿Qué ocurre en t = 1,5?

ii) ¿Cómo es el movimiento en el intervalo [0 ; 1,5)? ¿Y en el intervalo (1,5 ; 5]?

d) **i)** ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa v = g(t)?

ii) ¿Qué representa físicamente dicha pendiente?

Ejercicio Nº 25

a) Representar $x: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ / x(t) = -t^2 + 10t$.

b) ¿Para qué tiempo se obtiene una posición máxima?

Ejercicio Nº 26

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad de 120 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Su altura sobre el suelo t segundos después del disparo está dada por $h(t) = -5t^2 + 120t$.

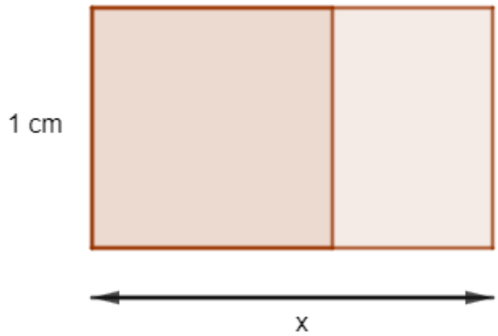
a) ¿Para qué valores de t el proyectil ascende? ¿Y para cuáles descende?

b) Hallar el instante en que el proyectil alcanza su altura máxima y calcularla.

c) Calcular el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.
d) Obtener el instante en que el proyectil alcanza los 50 m de altura.

Ejercicio Nº 27
Se desea cercar un terreno rectangular y dividirlo en tres partes con dos divisones interiores y paralelas a uno de los lados. Hallar, si es posible, las dimensiones del terreno considerando que la longitud total de la cerca es 800 m y el área del terreno es:
a) 19 200 m^2; **b)** 20 000 m^2; **c)** 23 000 m^2.

Ejercicio Nº 28
Se dice que la forma ideal de un rectángulo utilizado en el dibujo artístico es la del rectángulo áureo, usado por los griegos.
En el rectángulo que figura a continuación, las dimensiones son tales que la razón entre la dimensión mayor y la menor es igual al número de oro, que se simboliza con Φ. Al construir en el rectángulo un cuadrado cuyo lado mide igual que la menor de sus dimensiones se obtiene un rectángulo semejante al original.



Considerar que el lado del cuadrado mide 1 cm y calcular el valor de x que es el valor de Φ.

❖ **Discriminante de la ecuación de segundo grado**

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ cuya fórmula resolvente es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ llamamos discriminante a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$. Se dan las siguientes situaciones posibles:
- si $\Delta = 0$, entonces $x_1 = x_2$, es decir que la ecuación de segundo grado tiene raíces reales iguales (raíz doble);
- si $\Delta > 0$, entonces $x_1 \neq x_2$, o sea que la ecuación de segundo grado tiene raíces reales y distintas (raíces simples);
- si $\Delta < 0$, entonces la ecuación de segundo grado no tiene raíces reales (no existen las raíces en el campo real).

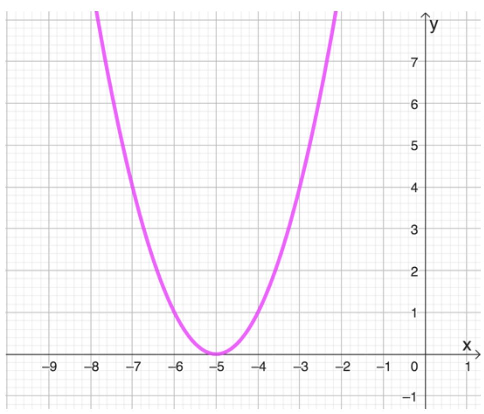
Ejemplo:
Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones.
a)

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = -5$ Raiz doble

$$y = x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \quad V = (-5\,,0)$$

El eje x es tangente a la parábola



b)

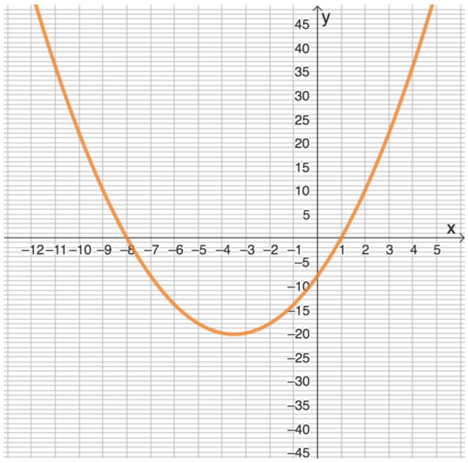
$$x^2+7x-8=0$$

$\Delta>0 \quad x_1=-8 \quad x_2=1 \quad x_1\neq x_2$ Raices simples

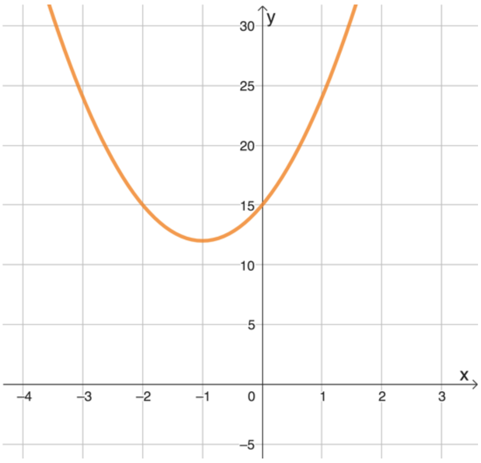
$$y=x^2+7x-8=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$$

$$V=\left(-\frac{7}{2},-\frac{81}{4}\right)$$

El eje x corta a la parábola en dos puntos.



c)



$$3x^2+6x+15=0$$

$\Delta<0$ sin raíces reales

$$y=3x^2+6x+15=3(x+1)^2+12$$

$$V=(-1;12)$$

El eje x no corta a la parábola.

Ejercicio Nº 29

Considerar que en la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ las raíces son x_1 y x_2 y el discriminante es Δ, e indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es V (verdadera) o F (falsa). Justificar.

a) Si $x_1\in R$ y $x_2\in R$, entonces $\Delta\geq 0$.

b) $x_1=x_2 \Rightarrow \Delta=0$.

c) Si $a<0$, entonces $\Delta>0$.

d) $b^2>4ac \Rightarrow x_1\neq x_2$.

e) Si $x_1\neq x_2$, entonces $b^2>4ac$.

Ejercicio Nº 30

Siendo $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ obtener:

a) x_1+x_2;

b) $x_1 . x_2$.

Ejercicio Nº 31

Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $x_1=5$ y $x_2=-7$.

Ejercicio Nº 32
Reconstruir la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas raíces son x_1 y x_2, sabiendo lo siguiente:
a) $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ y $a = 2$;
b) $x_1 = 1-\sqrt{3}$, $x_2 = 1+\sqrt{3}$ y $a = -\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio Nº 33
Calcular en cada caso el valor de m para que la ecuación:
a) $2x^2 + \dfrac{1}{2}x + m = 0$ tenga raíz doble ;
b) $x^2 + x + m = 1$ tenga una raíz nula;
c) $x^2 - 8x + m = 0$ tenga una raíz igual al triplo de la otra.

Ejercicio Nº 34
Hallar el conjunto de valores de k para que el gráfico de la función cuya fórmula es $y = -3x^2 - 2kx - 3$ no corte al eje x.

Ejercicio Nº 35
En cada uno de los siguientes casos, obtener el valor de k para que la ecuación tenga raíz doble.
a) $2x^2 - (k-1)x = -\dfrac{1}{2}$
b) $x^2 + 2(k-1)x + 4k = 0$

Ejercicio Nº 36
Hallar el valor de k para que la suma de las raíces sea igual al producto en cada una de estas ecuaciones:
a) $x^2 - (2k-3)x - k = 0$
b) $2x^2 + (k+1)x + 3k - 5 = 0$

Ejercicio Nº 37
En cada una de las siguientes ecuaciones, obtener el valor de k para que $x_1 = 0$.
a) $5x^2 - 5kx + 4k - 1 = 0$
b) $x^2 + 3kx - k + 1 = 0$

Ejercicio Nº 38
Considerar la ecuación $x^2 + 8x + k = 0$ y hallar el valor de k para que una raíz sea 3 veces la otra.

❖ **Factorización del trinomio de segundo grado**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Como $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, entonces:

$$y = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2\right)$$
$$y = a\left(x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2\right)$$
$$y = a\left(x(x - x_2) - x_1 (x - x_2)\right)$$
$$y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Ejercicio Nº 39
Factorizar estos trinomios:

a) $2x^2 - 3x - 2$
b) $x^2 + 4x - 45$
c) $4x^2 - 3$
d) $3x^2 + 2x - 1$
e) $-2x^2 + 2x + 180$

Ejercicio Nº 40
Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $y > 2x^2 - 3x - 2$
b) $y \leq x^2 + 4x - 45$
c) $y \geq 4x^2 - 3$
d) $y < 3x^2 + 2x - 1$
e) $y \leq -2x^2 + 2x + 180$

Ejercicio Nº 41
Resolver estas ecuaciones bicuadradas:

a) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$
b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
c) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
d) $4\,(x^2 - 1)^2 + 3x^2 - 3 = 0$
e) $(x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) + 3 = 0$

❖ **Recta secante, recta tangente o recta exterior a una parábola**

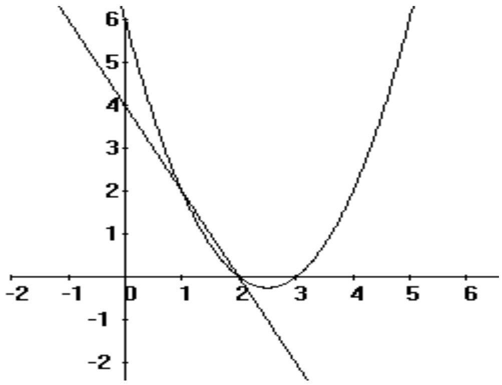
Resolvamos primero gráfica y luego analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \rightarrow \text{parábola} \\ 2x + y = 4 \rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

• Gráficamente

$$y = x^2 - \underbrace{5}_{2\,.\,\frac{5}{2}}\,x + 6 \qquad y = \underbrace{x^2 - 2\,.\,\frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}_{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} - \frac{25}{4} + 6$$

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} \qquad V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Representamos la parábola.
Representamos la recta.
Las coordenadas de los puntos A = (2 , 0) y B = (1 , 2) resuelven el sistema de ecuaciones.

- Analíticamente

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = -2x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 4 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 2x + 6 - 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = 2 \text{ o } x = 1$$

Si x = 2, entonces y = 0.
Si x = 1, entonces y = 2.
Por lo tanto, las coordenadas de los puntos A = (2,0) y B = (1,2) resuelven el sistema de ecuaciones.

Al resolver el discriminante de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ se obtiene que dicho discriminante es mayor que cero, con lo cual resultan dos valores distintos para x. Es decir que existen dos puntos de intersección entre la recta y la parábola. Luego, la recta es secante a la parábola.

¿Cómo interpretarías gráficamente que el discriminante de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ hubiese sido
a) nulo? (En este caso, la recta es tangente a la parábola.)
b) negativo? (En este caso, la recta es exterior a la parábola.)

Ejercicio Nº 42
Resolver analítica y graficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 = y \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 \\ y = -6x - 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ \dfrac{1}{2}x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Ejercicio Nº 43
Una compañía utiliza las siguientes fórmulas para expresar el costo (C) y el ingreso total (i) en relación con la producción y la venta de x unidades de un cierto producto.

$$C(x) = 10x + 600 \qquad i(x) = 80x - x^2$$

a) Representar en un mismo sistema de ejes cartesianos las dos funciones.

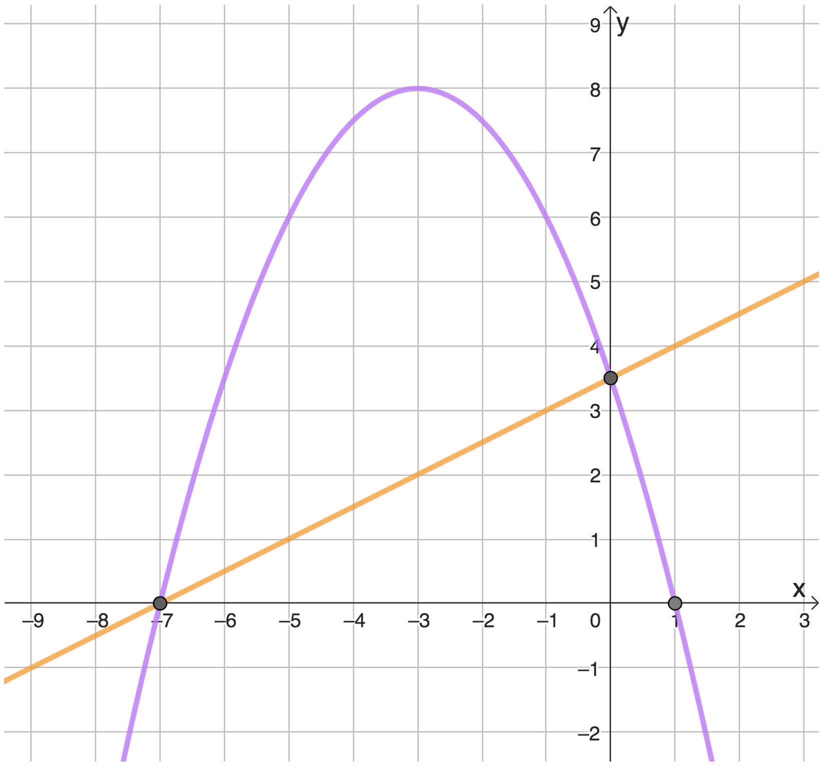
b) Hallar los puntos de intersección de los gráficos de las funciones mencionadas. ¿Qué significado tienen esos puntos con relación a la ganancia?

c) Expresar la fórmula de la función ganancia y representar esa función en un sistema de ejes cartesianos.

d) ¿Cuáles son los valores de x para los cuales hay ganancia? ¿Y para los cuales hay perdida?

Ejercicio Nº 44

Considerar los datos del siguiente gráfico y obtener la ecuación de la recta.



Ejercicio Nº 45

Considerar la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ y hallar la recta de la forma $y = mx + b$ tal que sea tangente a esa parábola en el punto (1 , 2) (punto de tangencia). Además, graficar la parábola y la recta en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio Nº 46

Determinar el valor de m para que la recta $y = mx - 2$ sea tangente a la parábola $y = x^2 - 2x - 1$. Interpretar gráficamente e indicar el punto de tangencia.

Ejercicio Nº 47

Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = mx - 1 \end{cases}$

e indicar para qué valores de m la recta resulta secante a la parábola.

Ejercicio Nº 48
Dada la parábola $y = 3x^2 - kx - 1$ y la recta $y = kx - 2$ determinar qué condición debe cumplir k para que:
a) la recta sea tangente a la parábola e indicar el punto de tangencia.
b) la recta no corte a la parábola.

Ejercicio Nº 49
Considerar la parábola $y = x^2 - 2x$ y obtener lo siguiente:
a) la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos de la parábola de abscisas 3 y 4.
b) la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 3.

Ejercicio Nº 50
Hallar el valor de k para que la recta $y = 2x + k$ sea tangente a la parábola $y = 2x^2 - 2x$ y graficar la recta y la parábola en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Ejercicio Nº 51
Una recta es normal a una curva en uno de sus puntos si y solo si es perpendicular a la recta tangente a dicha curva en ese punto.
Obtener la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto (3 ; 2).

Ejercicio Nº 52
Para cada una de las siguientes fórmulas considerar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, graficar la función y escribir el conjunto imagen.

a) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right|$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \;\; x \leq 1 \\ (x-1)^2 & si \;\; x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si\ |x| \leq 2 \\ -3 & si\ x < -2 \\ \frac{1}{2} & si\ x > 2 \end{cases}$