Colegio Nacional de Buenos Aires

# MATEMÁTICA DE 1ER AÑO

## Guía de Trabajos Prácticos

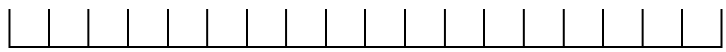
## 2013

# *ÍNDICE*

| | |
|---|---|
| ***TP 1: Números racionales no negativos*** | ***3*** |
| ***TP 2: Ángulos*** | ***9*** |
| ***TP 3: Conjuntos, conteo y probabilidades*** | ***20*** |
| ***TP 4: Suma, resta, multiplicación y división en Z y Q*** | ***26*** |
| ***TP 5: Triángulos*** | ***37*** |
| ***TP 6: Potencias y Raíces*** | ***40*** |
| ***TP 7: Cuadriláteros*** | ***52*** |
| ***TP 8: Nociones de Estadística*** | ***57*** |
| ***Respuestas a ejercicios*** | ***64*** |
| ***Programa Analítico*** | ***69*** |
| ***Más problemas ingeniosos*** | ***71*** |

# *Trabajo Práctico 1: Números racionales no negativos*

**1.** Representá sobre la recta estos números: $\frac{7}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{3}$.




**2.** Realizá mentalmente los cálculos necesarios para contestar a las siguientes preguntas.

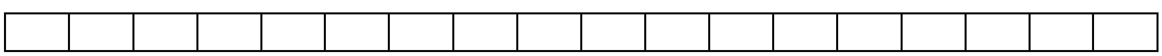
El número $\frac{9}{4}$

a) ¿en cuánto excede a 2? b) ¿cuánto le falta para 3?

c) ¿en cuánto excede a 1? d) ¿cuánto le falta para $\frac{11}{4}$?

**3.** Un piso rectangular de 4 metros de ancho por 6 metros de largo ha sido representado en un plano usando una escala lineal de 1: 50. ¿Qué parte del área real representa el área del dibujo?

**4.** Los puntos P y Q marcados en la regleta representan a los números $\frac{2}{7}$ y $\frac{9}{7}$ respectivamente. Marcá los puntos que representan al 0, al 1 y al 2.




**5.** Escribí por lo menos dos procedimientos distintos para comparar los números que figuran en cada ítem.

a) 1,35 y $\frac{7}{5}$;

b) $\frac{17}{5}$ y $\frac{11}{3}$.

*Toda fracción puede expresarse en centésimos en forma exacta o aproximada. Por ejemplo:*

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} \qquad \frac{1}{3} \cong \frac{33}{100}$$

*La expresión en centésimos de una fracción es un* porcentaje.

**6.** Respondé a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué porcentaje de 25 es 5?

b) ¿Qué porcentaje de 5 es 25?

c) ¿Qué porcentaje de $n$ representa 0,85 . $n$?

d) ¿Qué porcentaje de $n$ representa el 3% de su 15%?
e) ¿Qué parte de $n$ representa la tercera parte de su 50%?
f) ¿En qué porcentaje se incrementa un número cuando se lo multiplica por 2,5?

**7.** En un supermercado aparece esta oferta:

PAGUE DOS, PERO

LLEVE TRES.

a) ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?
b) ¿Qué porcentaje del precio original paga el que aprovecha la oferta?

**8.** Las servilletas de papel están de oferta en dos comercios que exhiben lo siguiente:

AUTOSERVICIO
*LOS DOS HERMANOS*

Compre 10 paquetes de servilletas y le regalamos uno.

Despensa *Don Luis*

Lleve 10 paquetes de servilletas y pague sólo 9.

a) ¿Cuál de las dos ofertas te parece más conveniente? ¿Por qué?
b) ¿Qué porcentaje rebajan en cada una?

**9.** Resolvé estos cálculos:

a) $\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right):0,3=$

b) $\frac{5}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}:0,3=$

c) $\frac{5}{6}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right):0,3=$

d) $\frac{1}{1-0,5}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-0,25}-\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=$

e) $\frac{0,5-0,25}{1+\frac{1}{2}}:\frac{1}{2-0,75}=$

**10.** La empresa *Asfaltix* se ocupó de pavimentar $\frac{1}{5}$ de una avenida, pero por razones presupuestarias suspendió el trabajo por un mes. Al reanudarlo, pavimentó $\frac{1}{3}$ de lo que faltaba y debió suspender nuevamente el trabajo.
a) ¿Qué fracción de la avenida ya está pavimentada?
b) ¿Qué fracción falta pavimentar?
c) Si todavía faltan pavimentar 8000 metros, ¿qué largo tiene la avenida?

**11.** Tres farmacias del centro de la ciudad hacen los siguientes descuentos a los afiliados al PAMI:

- Farmacia 1: 60% + 30%
- Farmacia 2: 30% + 60%
- Farmacia 3: 90%

(**Nota**: cuando aparecen dos porcentajes sumados como en las dos primeras farmacias, se debe efectuar el primer descuento y luego, sobre lo que habría que pagar, se debe realizar el segundo descuento.)

a) Un jubilado necesita comprar un medicamento cuyo precio de lista es $60. ¿En qué farmacia le conviene comprarlo?
b) ¿Es lo mismo un descuento del 60% + 30% que uno del 30% + 60% o que un único descuento del 90%?

c) ¿Cuál de los descuentos le conviene más al que compra? ¿Y al que vende?

**12**. a) Dentro de 10 años, Juan tendrá el doble de la edad de Ana, pero, hace 5 años, era 3 veces mayor. Hallar las edades actuales de Juan y Ana.

b) En una población, las dos quintas partes son estudiantes, un quinto, jubilados. Las tres cuartas partes del resto, son trabajadores y finalmente hay 1600 amas de casa. Indicar el número de personas de la población y hallar el porcentaje total de estudiantes y trabajadores.

c) Una persona gasta la mitad de lo que gana en alquiler, expensas y servicios. Los dos tercios del resto los destina a otros gastos. Al terminar el mes, pudo ahorrar 1300$. Cuánto gana por mes?

**13**.Resolvé las siguientes ecuaciones:

| | | |
|---|---|---|
| a) $2x + 1 = x + 3$ | b) $3y - 2 = 3 + 2y$ | c) $4 + 5x = 6 + x$ |
| d) $\frac{1}{2}x - 3 = 1 - 3x$ | e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}m = \frac{5}{3}m - 1$ | f) $4x + 2 - 3x = 1 + 3x$ |
| g) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{4} + \frac{3}{5}$ | h) $3 + 2 \cdot (z - 1) = 1$ | i) $1 + 2 \cdot (1 + 3p) = 3p + 8$ |
| j) $\frac{1}{3}x + 2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = 2 - x$ | k) $2 + 3 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right) = \frac{3}{2} - x$ | l) $\frac{u+1}{3} = 2$ |

m) 2 x = 2 . (x + 3) n) 2 . (x + 3) = 2 x + 6

***Expresiones decimales exactas y periódicas***

*En una fracción, la raya indica una división.*
*El cociente que se obtiene al dividir el numerador por el denominador puede ser lo siguiente:*

*a) un número natural. Por ejemplo:* $\frac{72}{8} = 9$.

*b) una expresión decimal exacta. Por ejemplo:* $\frac{72}{10} = 7{,}2$.

*c) una expresión decimal periódica. Por ejemplo:*

*i)* $\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}\overset{\frown}{6}$*; que es una expresión decimal periódica pura.*

*ii)* $\frac{29}{22} = 1{,}3181818... = 1{,}3\overset{\frown}{18}$*; que es una expresión decimal periódica mixta.*

**14.** a) Obtené las expresiones decimales correspondientes a esta fracciones:

i) $\frac{3}{8}$ ii) $\frac{2}{9}$ iii) $\frac{7}{45}$ iv) $\frac{17}{50}$ v) $\frac{11}{3}$

b) Indicá cuáles de las expresiones obtenidas en el ítem a) son exactas y cuáles son periódicas. Clasificá estas últimas en puras o mixtas.
c) ¿Qué condición debe cumplir el denominador de una fracción para que la expresión decimal asociada a dicha fracción sea exacta?

*Toda expresión decimal, exacta o periódica, puede transformarse en una fracción. La correspondiente fracción irreducible se llama* fracción generatriz.

**15.** a) Analizá el siguiente procedimiento para obtener la fracción generatriz correspondiente a una expresión decimal periódica pura o mixta.

Si se considera que x = 2,353535..., entonces: 100 x = 235,3535...
1 x = 2,3535...

Luego, restando miembro a miembro se obtiene lo siguiente: 99 x = 233

A partir del número considerado, se obtienen dos números periódicos puros que tienen el mismo período. Por lo tanto, la diferencia entre ambos es un número natural.

Por lo tanto: $x = \frac{233}{99} = 2{,}3535...$

b) Investigá si es posible obtener el mismo resultado, pero considerando 10 000 x.
c) Utilizá un procedimiento similar al del ítem a) para encontrar la fracción generatriz de estas expresiones decimales:

i) $0{,}3\widehat{4}$  ii) $1{,}4\overline{51}$  iii) $1{,}\overline{451}$  iv) $1{,}45\widehat{1}$

d) Sin utilizar el procedimiento del ítem a), escribí la fracción generatriz de cada una de las siguientes expresiones decimales periódicas:

i) $0{,}\overline{345}$  ii) $1{,}7\widehat{8}$  iii) $0{,}\widehat{9}$  iv) $0{,}3\widehat{9}$  v) $2{,}0\overline{32}$

**16.** ¿Qué condición debe cumplir el número natural $n$ para que la expresión decimal asociada a la fracción $\dfrac{n}{11}$ sea periódica?

**17.** La expresión decimal asociada a $\dfrac{a}{2^3 \,.\, 5}$, siendo $a$ un número natural mayor que 0, ¿es exacta o periódica? ¿Por qué?

**18.** a) Escribí, si es posible, dos expresiones decimales periódicas cuya suma sea un número natural.

b) Escribí, si es posible, dos expresiones decimales periódicas tales que al sumarlas se obtenga una expresión decimal exacta.

**19.** El siguiente problema corresponde a un hecho real ocurrido en el CNBA en 1999. Agustín, alumno de $2^{do}$ $8^{a}$, no recordaba cómo convertir expresiones decimales periódicas mixtas en fracciones y realizó este procedimiento:

$$1{,}32161616\ldots = 1 + \frac{32}{100} + \frac{16}{9900}$$

¿Es correcto el procedimiento que utilizó Agustín? Justificá tu repuesta.

**20**. Resolvé los siguientes cálculos:

a) $$\frac{0{,}1\widehat{9} + \dfrac{1}{4}}{1{,}2 + 0{,}14\widehat{9}} - \frac{1}{12} =$$

b) $$0{,}375 \,.\, \left(2{,}4 : \frac{6}{5} + 1\right) - \frac{0{,}\widehat{5} \,.\, \dfrac{9}{5} - \dfrac{1}{6} \,.\, (1{,}\widehat{6} - 1)}{4{,}2 : 4{,}4\widehat{9}} =$$

**21.** Resolver en $Q^{+}_{0}$ (conjunto de los números racionales positivos con el cero) estos cálculos:

a) $$0{,}\widehat{6} + 3 \,.\, \left(z - \frac{1}{7}\right) = 1 + 2\,z$$

b) $$0{,}\widehat{6} + 3\,z - \frac{1}{7} = 1 + 2\,z$$

## *El concepto de número racional positivo*

♦ *Una fracción* $\frac{a}{b}$*, con* $b \neq 0$ *y positiva, puede interpretarse como el cociente de dos números naturales.*

♦ *Si* $a$ *es múltiplo de* $b$ *, la fracción representa un número natural. Si* $a$ *no es múltiplo de* $b$ *, la fracción se asocia a una expresión decimal que puede ser exacta o periódica según se obtenga o no resto 0.*

♦ *Se llama* número racional positivo *a aquél que se puede expresar como cociente de dos números naturales, siendo el segundo distinto de cero.*

♦ *Los números naturales, las expresiones decimales exactas y las expresiones decimales periódicas son números racionales.*

♦ *Un número racional positivo puede expresarse mediante infinitas fracciones equivalentes. Se elige como fracción* representante *de dicho número racional positivo a la fracción irreducible. Por ejemplo :*

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{50}{200} = ... = \frac{1}{4}$$

Como fracción representante de 0,25 se elige la última fracción porque es la irreducible.

♦ *Designaremos con* $Q^+$ *al conjunto de los números racionales positivos y con* $Q^+_0$ *al de los racionales positivos con el cero.*

♦ *Existen expresiones decimales infinitas que no son periódicas. Por ejemplo: 0,123456789101112… Esas expresiones no pueden transformarse en fracciones y por lo tanto, no son números racionales.*

# *Trabajo Práctico 2: Ángulos*

**1.** a)Seguí las instrucciones**:**

I.- Marcar en la hoja tres puntos A, B y C no pertenecientes a una misma recta.

II.- Trazar la rectas AB y BC

III.- Rayar con un color el semiplano de borde AB al que pertenece el punto C.

IV.- Rayar con otro color el semiplano de borde BC al que pertenece el punto A **.**

> *La región del plano que te quedó rayada de dos colores es el ángulo convexo ABC.*
> *(Notación:* $A\hat{B}C$ *)*
> *El punto B que se nombra en el centro, es el vértice del ángulo.*

b) Teniendo en cuenta que definir significa describir un objeto de tal forma que pueda reconocerse unívocamente, definí con tus palabras, y con la mayor precisión posible qué es un ángulo convexo.
c) Los lados de un ángulo, ¿son rectas, semirrecta o segmentos?
d) Buscá en algún manual de la escuela primaria o en cualquier texto de primer año, cómo se mide un ángulo y cuáles son las unidades que habitualmente se usan.
e) Definí ángulo recto, ángulo llano, ángulos complementarios y ángulos suplementarios.
f) Definí bisectriz de un ángulo.

Calculá la medida de un ángulo β (se escribe: $|\ \hat{\beta}\ |$) si :

a) es el doble de la medida de su complemento.

b) es la tercera parte de la medida de su suplemento.

c) difiere de la de su suplemento en 15 °.

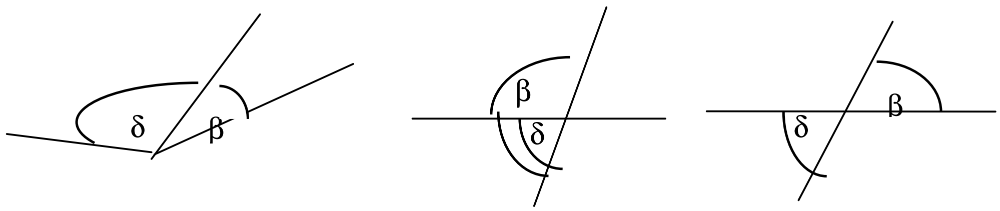
d) la medida de su suplemento es igual al doble de : su medida incrementada en 10°.

e) la medida de su suplemento es igual al doble de su medida, incrementado en 10° .

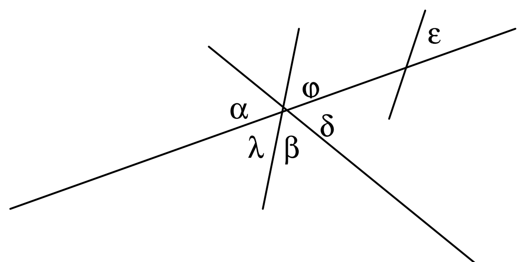
f) La suma de las medidas de su complemento y de su suplemento es 150°.

g) La medida de su complemento supera en 5° a los dos quintos de la medida de su suplemento.

**3.** ¿En cuál de los siguientes dibujos β y δ son adyacentes?




**4.** En el dibujo que sigue, encontrá, si es posible, dos pares de ángulos opuestos por el vértice.




**5.** Analizá cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Justificá. (Tené en cuenta cuándo alcanza con mostrar un ejemplo y cuándo es necesario dar un argumento que no dependa de una situación particular)

5.1.- Si dos ángulos son suplementarios, entonces, son adyacentes.

5.2.- Si dos ángulos son adyacentes, entonces, son suplementarios.

5.3.- Algunos pares de ángulos suplementarios son adyacentes.

5.4.- Si las medidas de los suplementos de dos ángulos son iguales, las medidas de dichos ángulos también lo son.

5.5.- Existen pares de ángulos opuestos por el vértice que son suplementarios.

5.6.- Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces tienen medidas iguales.

5.7.- Si dos ángulos tienen medidas iguales , entonces son opuestos por el vértice.

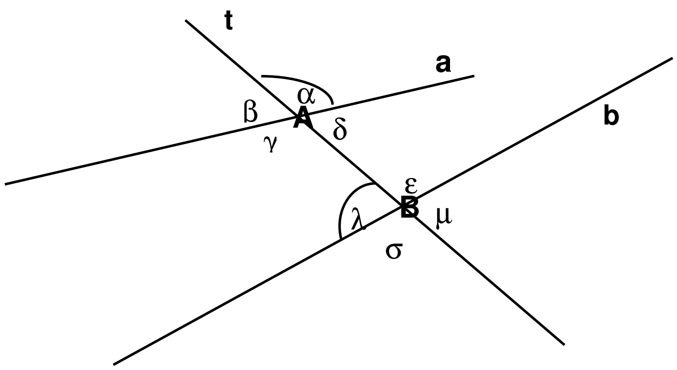
**6.** Dibuja dos ángulos adyacentes y las bisectrices de cada uno de ellos.
¿Qué ángulo forman las bisectrices de éstos ángulos? ¿Es general? ¿Por qué?

**7.** Dibuja un par de ángulos opuestos por el vértice y las bisectrices de cada uno de ellos.
¿Qué ángulo forman las bisectrices dibujadas? Es una propiedad general? .Justificá.

**8.** Si $|\beta| = \frac{2}{3}x + 20^\circ$ y $|\delta| = x + 10^\circ$ , calculá $|\beta|$ y $|\delta|$ suponiendo que β y δ son

a) opuestos por el vértice b) adyacentes.

**9.** En el dibujo se señalan ocho ángulos formados por las rectas **a** y **b** cortadas por la <u>transversal</u> **t**




Respecto de los ocho ángulos marcados se dan las siguientes definiciones:

**Definición 1:** Los ángulos que se encuentran en un mismo semiplano respecto de la transversal **t** se llaman **colaterales.**

**Definición 2:** Los ángulos incluidos en el semiplano de borde **a** al que no pertenece **B** o en el semiplano de borde **b** al que no pertenece **A**, se llaman **exteriores**.

a) Indicá qué ángulos son colaterales.

b) ¿Cuáles son los ángulos exteriores y cuáles los interiores?

c) Indicá qué características tiene el ángulo $\partial$

d) Indicá qué características tiene el ángulo $\mu$

e) Indicá qué características comunes tienen los ángulos: $\partial$ y $\lambda$

f) Indicá qué características comunes tienen los ángulos: $\lambda$ y $\gamma$

g) Nombrá todas las parejas de ángulos que cumplan con las siguientes características:

***i) Ser colaterales***
***ii) No ser adyacentes*** `
***iii) Ser uno interior y otro exterior***

***Estos ángulos son <u>correspondientes</u> entre a y b cortadas por t transversal .***

h) Nombrá todas las parejas de ángulos que cumplan con las siguientes características:

***i) Ser colaterales***
***ii) Ser ambos interiores.***

***Estos ángulos son <u>conjugados internos</u> entre a y b cortadas por t*** *transversal.*

*i) Ser colaterales*
*ii) Ser ambos exteriores.*

***Estos ángulos son <u>conjugados externos</u> entre a y b cortadas por t transversal.***

j) Nombrá todas las parejas de ángulos que cumplan con las siguientes características:

*i) No ser colaterales*
*ii) No ser adyacentes*
*iii) Ser ambos interiores*

***Estos ángulos son <u>alternos internos</u> entre a y b cortadas por t transversal.***

k) Nombrá todas las parejas de ángulos que cumplan con las siguientes características:
*i) No ser colaterales*
*ii) No ser adyacentes* `
*iii) Ser ambos exteriores*

***Estos ángulos son <u>alternos externos</u> entre a y b cortadas por t transversal.***

**10.** a)Dibujá dos rectas **a** y **b** , paralelas y trazá una tercera recta **t** que corte a ambas.

b) Marcá dos ángulos correspondientes entre **a** y **b** cortadas por **t**

c) Copiá uno de ellos sobre un papel de calcar y apoyá la copia sobre el otro .¿Qué observás?

Compará tu conclusión con la de tus compañeros.

**11.** a)Dibujá con regla y compás dos ángulos correspondientes entre dos rectas **a** y **b** cortadas por una transversal **t** , de tal forma que sean congruentes (es decir, que tengan igual medida)

b) ¿Qué podés decir de las rectas **a** y **b** ?

Compará tu conclusión con la de tus compañeros.

Aceptamos que:

- ***Los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes.***

- ***Si dos ángulos correspondientes entre dos rectas cortadas por una tercera son congruentes, entonces las dos primeras rectas son paralelas***

**12.** Dibujá un par de ángulos alternos ( internos o externos) entre paralela. Decidí si son congruentes. Justificá porqué.

**13.** Hacé lo mismo para un par de ángulos conjugados internos entre paralelas. Qué relación hay entre sus medidas?. Por qué?

**14.** Decidí si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsas. Justificá tu elección.
14.1 .- Existen ángulos alternos internos entre paralelas que son suplementarios.

14.2.- Los ángulos alternos externos siempre son congruentes.
14.3.- Algunos pares de ángulos conjugados externos entre paralelas son congruentes.
14.4.- Los ángulos conjugados externos son siempre suplementarios.
14.5.- Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios.
14.6.- Si dos rectas son cortadas por una tercera formando ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.
14.7.- Si dos rectas son cortadas por una tercera formando ángulos conjugados externos suplementarios, entonces son paralelas.

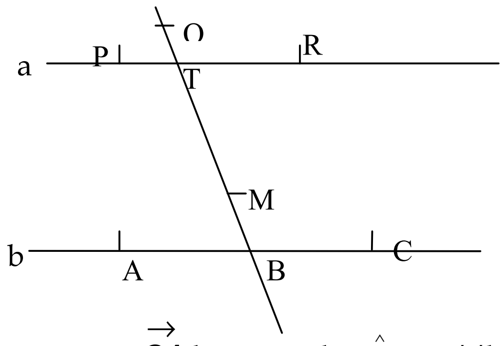
**15.** a) Si a y b son rectas paralelas cortadas por una transversal t y uno de los ángulos determinados por estas rectas mide $48^o$, hallá las medidas de los restantes siete ángulos.

b) Sabiendo que $\alpha$ y $\beta$ son conjugados externos entre paralelas, que $\delta$ y $\alpha$ son alternos externos y que la medida de $\delta$ es la mitad de la medida de $\beta$, hallá las medidas de los tres ángulos.

c) Hallá las medidas de $\alpha$ y $\beta$ sabiendo que son conjugados internos entre paralelas y que la diferencia entre sus medidas es $36^o$.

**16.** En los dibujos que siguen a// b

16.1)



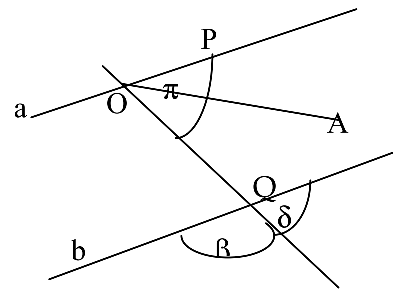

Dato: $|P\hat{T}Q| = \frac{1}{3}\left(|M\hat{B}C| - 20^\circ\right)$

Calculá: $|Q\hat{T}R|$ y $|A\hat{B}M|$

16.2.- Datos: $\overrightarrow{OA}$ bisectriz de $P\hat{O}Q$ ,a//b

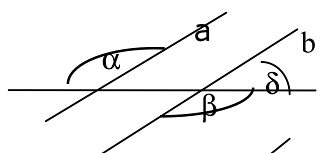
$|P\hat{O}A| = 0{,}5\,|\beta| - 20^\circ$

Calculá : $|\delta|$ y $|\pi|$



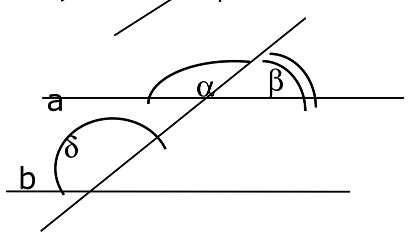

**17.** Calculá la medida de δ si a //b teniendo en cuenta los datos que se dan en cada gráfico:

a )




$|\hat{\alpha}| = 5x - 12^\circ$ ; $|\hat{\beta}| = 3x + 10^\circ$

b)




$|\hat{\alpha}| = 2|\hat{\beta}| + y$ ; $|\hat{\alpha}| = y + 20^\circ$

**18. i)** Si las semirrectas AP y BQ son bisectrices de dos ángulos alternos externos entre a//b y t transversal,¿cómo resultan las rectas AP y BQ? ¿Por qué?

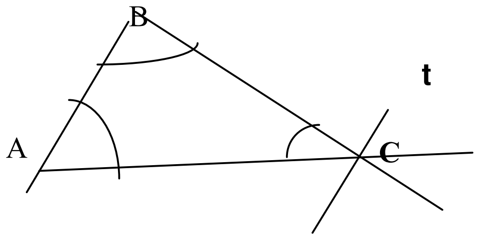
**ii)** Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.

a)¿Cómo son los ángulos consecutivos de un paralelogramo? ¿Por qué?

b)¿Cómo son los ángulos opuestos de un paralelogramos ?¿Por qué?

**19** En el cuadrilátero ABCD, $|\hat{A}| + |\hat{B}| = 180°$ y $|\hat{B}| + |\hat{C}| = 180°$.¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD? ¿Por qué?.

**20** En el dibujo, **t** // AB . Buscá ángulos que sean congruentes con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y deducí a qué es igual la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo. Justificá.

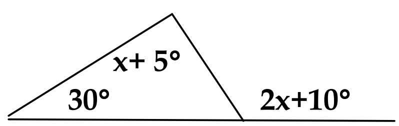



**21.** ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo ABC, si la medida de A es igual a las dos terceras partes de la medida de B y ésta es el doble de la medida de C?

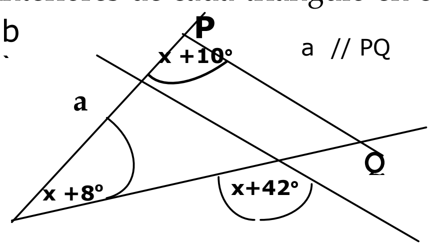
**22.** a) Dibujá un triángulo y marcá **todos** sus ángulos exteriores. ¿Cuántos tiene?
b) ¿A qué es igual la suma de las medidas de **todos** los ángulos exteriores de un triángulo? ¿Por qué?
c) ¿Qué relación existe entre la medida de un ángulo exterior y las de los ángulos interiores que no son adyacentes a él? Justificá.

**23.** Calculá x y las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo en cada una de estas figuras:

a)




b

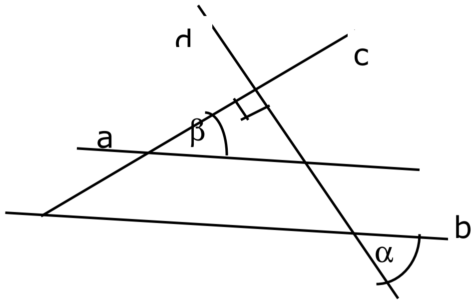



**24.** En $\overset{\triangle}{ABC}$, O es la intersección de la bisectrices de $\hat{B}$ y $\hat{C}$. Calculá $\left|B\hat{O}C\right|$, sabiendo que: $|\hat{B}| + |\hat{C}| = 5.\left|\hat{A}\right|$.

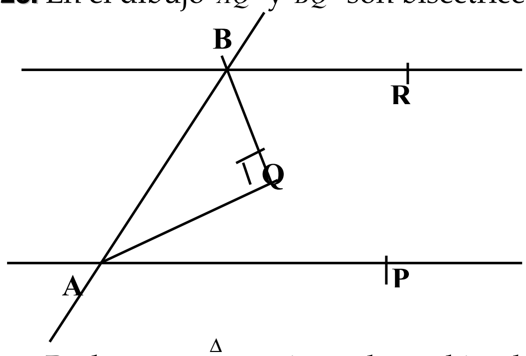
**25.** Las rectas que incluyen a las bisectrices de los ángulos exteriores de $\overset{\triangle}{ABC}$, se cortan determinando el triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$. Si dos de los ángulos interiores de $\overset{\triangle}{ABC}$ son tales que $\left|\hat{A}\right| = 56°$ y $|\hat{B}| = 65°$, ¿cuánto mide cada ángulo interior del $\overset{\triangle}{PQR}$?

**26.** Dibuja un ángulo $B\hat{O}A$ y su bisectriz $\overrightarrow{OM}$. Por M se traza la paralela a OA que corta a OB en N. Probá que $\overset{\triangle}{OMN}$ es isósceles.

**27.** En la figura : $c \perp d$ , $a \parallel b$. Demostrá que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios




**28.** En el dibujo $\overrightarrow{AQ}$ y $\overrightarrow{BQ}$ son bisectrices de $\widehat{PAB}$ y $\widehat{RBA}$ respectivamente.

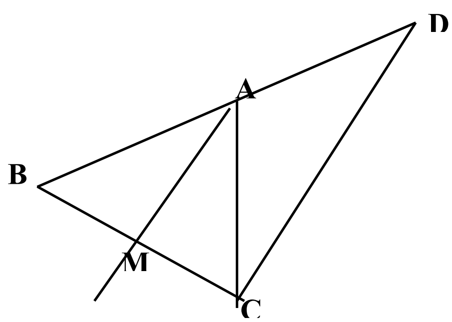



Probá que si :

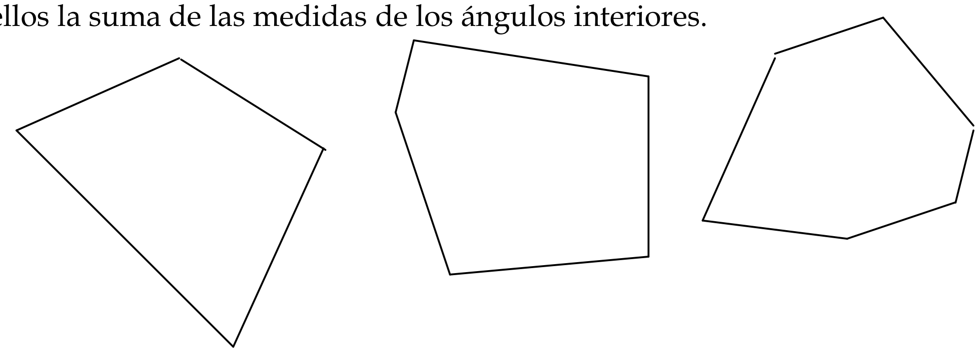
a) $AP \parallel BR$ , entonces $AQ \perp BQ$

b) $AQ \perp BQ$, entonces $AP \parallel BR$

**29.** Probá que $\overset{\triangle}{ACD}$ es isósceles, sabiendo que $\overrightarrow{AM}$ es bisectriz de $\widehat{BAC}$ y $AM \parallel CD$




**30.** a)Descomponé cada uno de estos polígonos en triángulos y calculá para cada uno de ellos la suma de las medidas de los ángulos interiores.



b) Escribí una fórmula que te permita calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de **“n “** lados .

**31.** a)¿Cuánto mide cada uno de los ángulos exteriores de un octógono regular?

b) ¿Cuántos lados tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos interiores es de 1080° ?

c) Calculá el número de lados de un polígono regular si la medida de cada uno de sus ángulos interiores es de 150°.

**32.** En el pentágono ABCDE, $|A| = 13/2\ |D|$ ; $|B| = 4\ |D|$; $|C| - |A| = 30°$ y $|E| = 2\ |A| - 110°$.
Calculá las medidas de los cinco ángulos del pentágono.

33. Calculá las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo ABCD si:
a) $|A| = x + 20°$ y $|C| = 2x - 80°$

b) $|A| = 0{,}5\ x + 30°$ y $|B| = x - 150°$

34. Calculá las medidas de los cuatro ángulos del trapecio RSUV con RS // UV, si: $|R| + |S| = 2\ |R| - 10°$ y $|R| - |V| = 60°$

## *Algunas definiciones y propiedades*

Los ángulos que tienen un lado común y son tales que los otros dos son semirrectas opuestas se llaman **adyacentes.**

*Los ángulos adyacentes son suplementarios.*

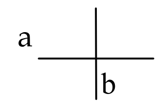
Dos ángulos son **opuestos por el vértice** si y sólo si los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

*Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

En el plano:
Dos rectas son **paralelas** si y sólo si son coincidentes o no tienen puntos en común.

a ________________
Notación: a // b b ________________

Dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si al cortarse determinan cuatro ángulos congruentes.
Notación: $a \perp b$
Cada uno de los ángulos determinados es **recto**




***Aceptamos que:***
***Los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes.***

***A partir de esta aseveración, se demuestra que:***
*Los ángulos alternos internos entre paralelas, son congruentes.*
*Los ángulos alternos externos entre paralelas, son congruentes*
*Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios*
*Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios*

***Aceptamos que:***
***Si dos ángulos correspondientes entre dos rectas cortadas por una tercera son congruentes, entonces las dos primeras rectas son paralelas***

***A partir de esta aseveración, se demuestra que:***
*Si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las dos primeras rectas son paralelas*
*Si los ángulos alternos externos son congruentes, entonces las dos primeras rectas son paralelas*
*Si los ángulos conjugados internos son suplementarios, entonces las dos primeras rectas son paralelas*
*Si los ángulos conjugados externos son suplementarios, entonces las dos primeras rectas son paralelas*

Se llama **ángulo exterior** de un triángulo a todo ángulo adyacente a un ángulo interior.
*La medida de un ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de las medidas de los otros ángulos interiores no adyacentes a él.*

*La suma las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es:*
$180^{o} (n-2)$

*La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono de cualquier número de lados es 360º, considerando un sólo ángulo exterior por vértice.*

Un **polígono regular** es un polígono que tiene todos sus lados y todos sus ángulos congruentes.

## *<u>Trabajo Práctico 3:</u> Conjuntos, conteo y probabilidades*

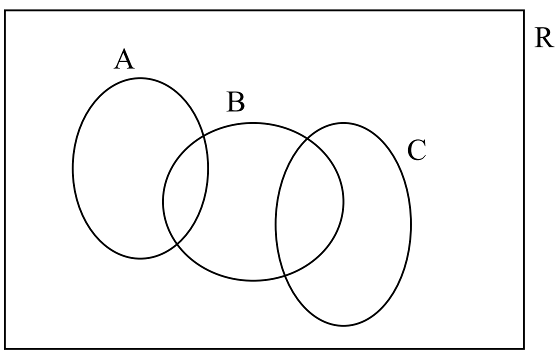
**1.** a) Considerá los siguientes conjuntos

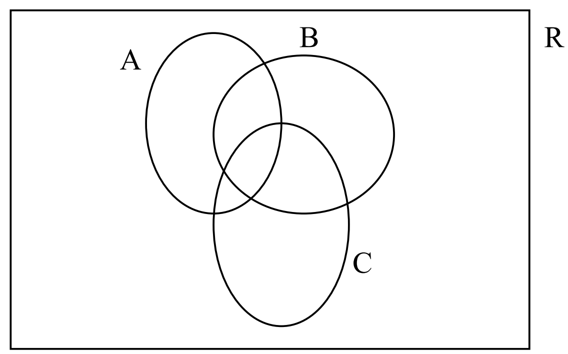
A = {divisores de 6}
B = {divisores de 9}
C = { 9, 10 }
R = {números naturales del 1 al 10}

Representalos en un diagrama de Venn y hallá:

$A \cap B \cap C$
$B - (A \cup C)$
$(B - A) \cap C$
$(A \cup B)^C$
$A^C \cap B^C$

b) Considerá los conjuntos dibujados a continuación **:**

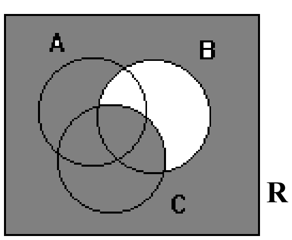


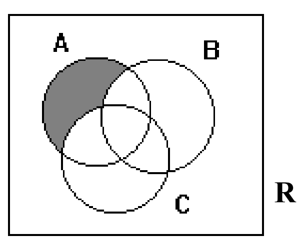

Sombreá en cada uno de los diagramas los resultados de cada una de las operaciones pedidas en el punto a)

**2**. Escribí la o las operaciones entre conjuntos correspondientes a cada uno de estos gráficos:

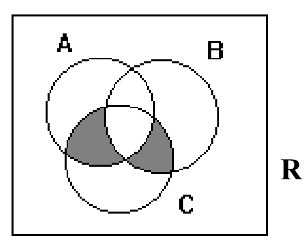
a)




b)



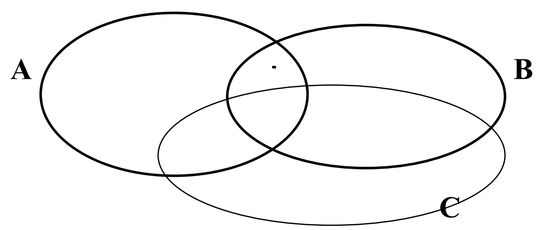

c)




3. En un curso de 40 alumnos, se obtiene la siguiente información sobre las calificaciones de cierta asignatura: 12 alumnos se eximieron, en diciembre se tomaron

22 exámenes y no hubo ausentes. En marzo rindieron los 14 alumnos que estaban inscriptos.
Diagramar la situación y hallar:
a) Cuántos aprobaron en diciembre?
b) Cuántos alumnos rindieron directamente en marzo?

4. Considerá el siguiente diagrama. En él, el conjunto A es el conjunto de las fracciones mayores que $\frac{1}{4}$, el conjunto B es el de las menores que $\frac{1}{2}$ y el conjunto C es el de las fracciones con denominador 5.




Ubicá en el diagrama anterior estas fracciones: $\frac{4}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}$ y $\frac{1}{6}$.

5. Al consultar a un curso de 37 alumnos sobre los tres grupos musicales preferidos, resultó que 16 elegían a Divididos, 13 a Los Piojos y 17 a Los Redondos. Además, entre los alumnos, 8 preferían a Divididos y a Los Piojos, 9 a Divididos y a Los Redondos, y 4 a Los Piojos y Los Redondos. Solamente 3 alumnos eran fanáticos de los tres grupos musicales.
a) ¿Cuántos chicos eligieron a Divididos, pero no a los otros grupos musicales?
b) ¿Cuántos alumnos prefirieron a Los Piojos y Los Redondos, pero no a Divididos?
c) ¿Cuántos chicos eligieron a Divididos y Los Redondos, pero no a Los Piojos?
d) ¿A cuántos alumnos no les gustaba ninguno de los tres grupos musicales?

6. Se encuestó a 30 chicas acerca de las actividades de entretenimiento que les gustaba realizar. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: 19 practicaban deportes, 16 ejecutaban instrumentos musicales, 7 solían practicar deportes y frecuentaban los juegos electrónicos, 5 solo practicaban deportes, 6 frecuentaban los juegos electrónicos y ejecutaban instrumentos musicales, 6 solo usaban los juegos electrónicos, y 4 realizaban las tres actividades.
a) ¿Cuántas chicas no realizaban ninguna de las tres actividades de entretenimiento?
b) ¿Cuántas muchachas solo ejecutaban instrumentos?
c) ¿Cuántas chicas practicaban deportes o frecuentaban los juegos electrónicos?

7.Una compañía aseguradora clasificó a un grupo de conductores de motos según la siguiente tabla:

| | Menores de 21 años | Entre 21 y 35 años | Mayores de 35 años | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Muy precavidos** | 15 | 20 | 35 | |
| **Precavidos** | 25 | 15 | 10 | |
| **Peligrosos** | 50 | 10 | 10 | |
| **Total** | | | | |

a) ¿Cuántos son los motociclistas que:
i) tienen menos de 21 años y son muy precavidos al conducir?
ii) no son peligrosas y están por encima de los 35 años?
iii) son menores de 21 años?
iv) se los considera muy precavidos?

b) ¿Qué porcentaje de los conductores de motos tiene menos de 21 años? ¿Y entre 21 y 35 años? ¿Y más de 35 años?
c) Nombrá los dos criterios según los cuales se han clasificado de dos formas diferentes a los motociclistas en este problema.

8. En una fiesta se produjo una tentativa de homicidio. La policía interrogó a 18 personas que estaban presentes en el momento del crimen y les pidió que contestaran sí o no a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Oyó usted un disparo?
- ¿Vio que alguien huía?

De las personas interrogadas, 10 contestaron sí a la primer pregunta, 6 respondieron no a la segunda y 5 contestaron no a las dos preguntas.
a) ¿Cuántas personas respondieron sí a las dos preguntas?
b) ¿Cuántos de los interrogados escucharon el disparo, pero no vieron si alguien huía?
c) ¿Cuántas personas no escucharon el disparo, aunque vieron que alguien huía?

9. En la escuela, Juan debe elegir 2 deportes de entre 5. ¿Cuántas son sus posibilidades de elección?

10. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono convexo?

11. Una familia compuesta por los padres, dos hijos (un niño y una niña) y la abuela decidió ir al cine y compró 5 localidades contiguas.
a) ¿De cuántas maneras pueden los integrantes de la familia ocupar los asientos?
b) ¿De cuántas opciones disponen para ubicarse en las butacas si la niña quiere sentarse al lado de la abuela?

12. En una ciudad de Estados Unidos, se realizó un trabajo estadístico acerca de la cantidad de víctimas de delincuentes por cada 1000 personas. A partir de los datos recopilados se confeccionó la siguiente tabla de acuerdo con el sexo y el tipo de delito padecido por la víctima.

| | Robo | Asalto | Ataque personal | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Hombre** | 5 | 18 | 52 | |
| **Mujer** | 2 | 9 | 42 | |
| **Total** | | | | |

Si de las 1000 personas encuestadas se elige a una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:
a) no haya sido víctima de un asalto?
b) sabiendo que se cometió un asalto, la víctima sea una mujer?

c) la persona que padeció el delito haya sido robada o atacada en forma personal, sabiendo que es un hombre?

13. A partir de una encuesta a 100 inversionistas, se registró que 5 poseían solo acciones, 15 habían invertido únicamente en valores y 70 eran propietarios de bonos. Además, entre los encuestados, 13 habían comprado acciones y valores, 23 poseían valores y bonos, y 10 eran propietarios de acciones y bonos. Solamente 3 de los encuestados habían invertido en los tres rubros.
a) Representá la situación en un diagrama adecuado.
b) Si se selecciona al azar a uno de esos inversionista, ¿cuál es la probabilidad de que:
i) sea poseedor de exactamente dos tipos de inversiones?
ii) haya invertido al menos en dos rubros?

14. El restaurante *El buen gusto* ofrece un menú que incluye 7 tipos de ensaladas, 6 platos principales y 9 postres. Un cliente pide una ensalada, un plato principal y un postre, y el mozo se los trae al azar.
¿Cuál es la probabilidad de que el mozo traiga la ensalada, el plato principal y el postre predilectos del cliente que realizó el pedido?

15. Calculá la probabilidad de obtener lo siguiente:
a) un puntaje menor que 8 al tirar un dado dos veces.
b) el mismo número de caras y cecas al tirar 5 monedas.
c) un puntaje menor o igual que 12 al tirar un dado dos veces.

16. De un grupo de matrimonios con tres hijos, se elige a uno al azar. Debatan con sus compañeros sobre cuál de las siguientes opciones es más probable:
a) que los tres hijos sean varones.
b) que solo dos hijos sean varones.
c) que al menos un hijo sea varón.
d) que solo los dos hijos mayores sean del mismo sexo.

17. Se lanzan dos dados cúbicos equilibrados* . Hallá la probabilidad de que:
a) la suma de los números obtenidos sea mayor que seis.
b) ambos números sean pares.
c) por lo menos uno de los números obtenido sea impar.

18. De una caja que contiene dos bolitas rojas, una blanca y una azul, se extraen sucesivamente dos bolitas sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que:
a) sean ambas del mismo color?
b) una de ellas sea azul ¿
c) al menos una de las bolitas extraídas sea roja?

19. Un guía de turismo debe realizar un viaje de ida y vuelta entre dos ciudades que están conectadas únicamente por estas cuatro rutas: A, B, C y D.
Antes de iniciar el viaje, el guía de turismo se entera de que la ruta C está cortada y la ruta D no está disponible para hacer el viaje de regreso.
Si dicho guía de turismo elige al azar las rutas para realizar su viaje, teniendo en cuenta las restricciones anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que vaya y vuelva por la misma ruta?

20. Una comisión está integrada por 12 mujeres y 14 hombres. La mitad de las mujeres y de los hombres de la comisión son profesionales.
Si se selecciona a un integrante de esa comisión al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer o un profesional?

21. En un florero hay 3 claveles y 4 rosas. De los claveles, 2 son rojos y uno es blanco. De las rosas, 2 son rojas y 2 son blancas.
Si se elige al azar una flor de ese florero, ¿cuál es la probabilidad de que sea un clavel o una flor roja?

***Síntesis***

**Relaciones entre conjuntos**

Las relaciones entre conjuntos son la de Inclusión y la de Igualdad
Un conjunto A está incluido en otro B, cuando todos los elementos de A también pertenecen a B
Un conjunto A es igual a B, cuando A está incluido en B y B está incluido en A. O sea, tienen los mismos elementos.

**Operaciones entre conjuntos**

Un elemento pertenece a AUB cuando pertenece a A o pertenece a B
Un elemento pertenece a A  B cuando pertenece a A y a B
Un elemento pertenece a A – B cuando pertenece a A pero no a B

* Un dado está equilibrado cuando cada cara tiene la misma probabilidad de salir.

Un elemento pertenece a $A^C$ cuando no pertenece a A

Para **contar** elementos de conjuntos, hemos usado varios tipos de diagramas:
Diagramas de Venn
Diagramas de Carroll
Diagramas de árbol

La **probabilidad** de un evento es la relación entre el número de casos en los que se produce ese evento (casos favorables) y el número de casos totales (casos posibles)

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

## *Trabajo Práctico 4:* *Suma, resta, multiplicación y división en Z y Q.*

## *Números enteros*

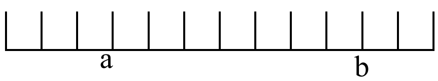
### A.- Orden

**1.** a)Ubicá en la recta numérica los siguientes números:

-3 ; | -5| ; 0; 2; -5; 7; -| -7|

b) Identificá en el conjunto anterior pares de números opuestos.

**2.** Ubicá el 0 en la recta sabiendo que b es el siguiente de – a y que cada marca en el dibujo corresponde a una unidad.




**3.** Indicá cuáles son los números enteros "x" que cumplen cada una de las condiciones que se dan a continuación. Representalos, en cada caso, en la recta numérica.

a. $-2 < x < 3$
b. $x < -2$ ó $x > 3$
c. $| x | > 4$
d. $-1 \leq x < 4$
e. $x < -2$ y $x \geq -6$
f. $| x | \leq 3$

**4.** Completá la siguiente tabla y luego indicá cuáles expresiones se refieren a los mismos números:

| **En lenguaje coloquial:** | **En símbolos:** | **Los números son:** |
|---|---|---|
| Los números enteros mayores que 2. | | |
| Los números enteros comprendidos entre –1 y 4. | | |
| | $x > 2 \quad o \quad x < -2$ | |
| Los números enteros cuya distancia a 0 es mayor que 2. | | |
| | $x > 3$ | |
| | | 3,4,5,6,..... |
| Los números enteros menores que –2. | | |
| Los números enteros cuya distancia al 0 es mayor o igual que 4. | | |
| | $x < 2 \quad y \quad x > -2$ | |
| | $\|x\| < 2$ | |

***Llamamos distancia entre dos números enteros a y b al valor absoluto de su diferencia: d(a,b) =*** $|a-b|$

**5.** 5.1 Hallá la distancia entre 8 y 10, 7 y -3, -5 y -2,
5.2 Hallá los números enteros cuya distancia a 7 es 3
cuya distancia a -2 es 5
5.3 Definí simbólicamente cada uno de los siguientes conjuntos de números enteros:

a) -2,-1,0,1,2,3,4
b) -7,-6,-5,-4
c) -2,-1,0,1,2
d) ....-7,-6,-5,3,4,5,...
e) ...-7,-6,-5,5,6,7,...

***<u>B.- Adición y sustracción</u>***

**6.** Resolvé:
a)-2 + 5 + (- 6) + (- 4) + 7=

b) 3 a + (- 5a) + ( -6a)=

c) -2 -(-4) + (-6) + 8 =

d) -2-{- 5- [- 3 + (- 1- 4) + 5 ]- 2} -9 =

e) -{-[-(-a + b ) +2a] - 2b }+3b =

**7.** ¿Qué diferencia de altura hay entre la cima del Everest que tiene 8882 metros y el fondo de la fosa marina de las Islas Marianas que está a 10915 metros de profundidad?

**8.** Completá el cuadro:

| Personaje | Año en que nació | Año en que murió | Años que vivió |
|---|---|---|---|
| Carlomagno | 742 | | 72 |
| Arquímedes | -287 | -212 | |
| Aristóteles | | -322 | 62 |
| Tito Livio | -59 | 16 | |
| Cleopatra | | -30 | 39 |

**9.** Hallá , si es posible , $x \in Z$ /
a) $-2x + 5 = -x - 3$

b) $|x| - 2 = 1$

c) - 3 x - 7 - (-2x) = 6

d) | x - 3 | = 5

e) 2 -[1- (1 - x ) + 3] = -5 + |-3|

**10.** Representá en una recta numérica, si es posible, el conjunto solución en Z de las siguientes inecuaciones:

a) $-2 < x + 5 < 3$

b) $|x + 2| > 4$

c) $-3 \leq x + 6 \leq 4$

d) $|x - 3| \leq 7$

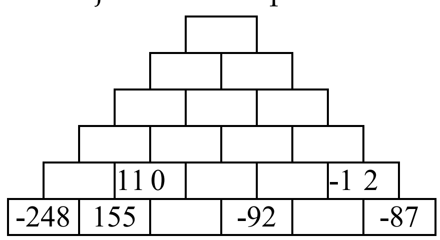
e) $x < -2$ y $x > 4$

f) $|x| > 0$

g) $4 \leq 3-x < 9$

h) $|5-x| < 0$

**11.** En cada casilla de esta pirámide debe figurar el número entero que resulta de sumar los dos que están debajo de él. Completala.




**12.** Para cada caso proponé enteros a y b tales que:

a) $|a+b| < |a-b|$ b) $|a+b| = |a-b|$ c) $|a+b| > |a-b|$

**13.** Hallá enteros a y b, tales que:

i. $|a| = 12$ , $|b| = 27$ y $a + b = 15$

ii. $|a| = 7$ , $|b| = 8$ y $a - b = 15$

iii. $a < 0$ , $|b| = 3$ y $a + b = -4$

**14.** Resolvé, si es posible, la siguientes ecuaciones e inecuaciones en Z y representá el conjunto solución en la recta numérica.

a) $-1 \leq z < 0$

b) $x + |-2| = 3$

c) $|z| + 4 \geq 7$

d) $|b| - 7 = 13 - (-3)$

e) $8 - |z| = 4$

f) $|9-12| - x < 2$

g) $|x-1| = 3$

h) $5 + |x| \geq 2$

i) $|b| - 2 \leq 3$

j) $2 + |x| \leq 1$

k) $|5+x| \geq 2$

l) $|b-2| \leq 3$

**15.** Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus respuestas

i) El opuesto del siguiente de un número es igual al siguiente del opuesto de dicho número.

ii) El opuesto del siguiente de un número es igual al anterior del opuesto de dicho número.

## *C.- Multiplicación y división*

**16.** Resolvé:

a) $-3.[-2 + ( 8 - 4 ): (-2) + 3. (-1)] -7=$

b) $-2 + (-1).(-2).(-5) + 2. ( a - 4 ) - [ 6 - 2.5 + 8a:(-4)] :(-2)=$

c) $8+(-3).(a- 2b+ c) -( 4 b- 6c): (-2)+(-2).(-1).(-5) +6c=$

d) $-12-[-4 - (-6+ 8x):(-2) - 5.(-2x + 4) -8x] +3x=$

**17.** Transformá en producto ( factorizá) las siguientes expresiones:

a) $25ab - 15 ac + 40 a=$ b) $6axy +12axyz-18abxy=$

c) $2(3x-5)+ 4b.(3x-5)-6c(3x-5)=$ d) $3.(m-n)+12c.(m-n)-4b.(m-n)=$

**18.** Considerá dos números enteros a y b tales que $a < b$, completá con < ó > según corresponda:

a) 2 a .... 2 b b) - 2 a .....- 2.b c) a: (-2).....b:(- 2)

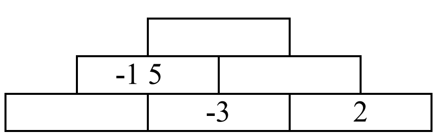
**19.** Se sabe que a y b son números enteros tales que $a.b < 0$ , y $a >0$, completá con < ó > según corresponda:

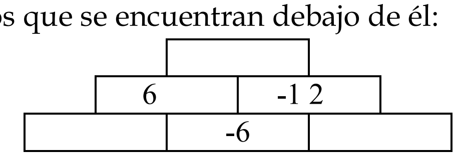
a) a.b.a.... 0 b) a.b.a.b .....0

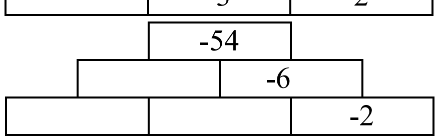
c) a.b.b .....0 d) -a.(-b).....0

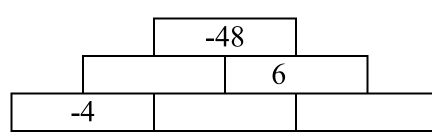
**20.** *El muro de los productos*

Ubicá en cada ladrillo un número entero de tal forma que sea igual al producto de los números contenidos en los ladrillos que se encuentran debajo de él:

a) 


b ) 


c ) 


d) 

**21.** El primero de cada mes, Lucio deposita su sueldo en una cuenta bancaria y retira \$230 por semana. Un lunes su saldo en la cuenta es de \$ 1520. Suponiendo que no deposita nada ni existe otro movimiento en la cuenta además de sus extracciones.

a) Encontrá una fórmula que te permita obtener el saldo de la cuenta dentro de "k" semanas
b) Reemplazá en la fórmula que obtuviste " k" por -1. ¿Cómo interpretás el resultado?

**22.** Resolvé en Z

a) $3.(x-1)- 2.(x+3)=x-(-3-2x)$

b) $(-2).(-x+1)-3.(-x+4)=x-2.(-x+3)$

c) $-(-3x+2)-5.(-2x-7)=(-12x-3):3$

d) $(-2).(x-1)>6$

e) $2.(-3)-|-1-1|>|x|-10$

f) $7+2.|x|\le 11$

g) $5-3.|x|\le -7$

h) $2-|x|+|-3-2|\ge 6$

i) $-8-(4-12x):(-2)<15-9:(-3)$

j) $(-9+3|x-1|).(-2)<-3(|x-1|+1)$

k) $(x-1).(x-2).(x+3)=0$

l) $x.y.z=0$

m) $(2x+4).x-(2x+4).3=0$

n) $x.(3x+6)+3x+6=0$

ñ) $x.y=x$

o) $x.(x+5)=x+5$ (*)

p) $x.(x+5)>0$

q) $x.(x+5)<0$ (*)

r) $x.(x+5)\ge 0$

s) $|x|\cdot(x+5)<0$ (*)

t) $|x|\cdot(x+5)\le 0$

u) $|x|\cdot|x+5|\le 0$ (*)

(*) Ejercicios optativos

**23.** La suma de tres números es -66. El primero es el doble del segundo y el tercero es 6 unidades menor que el primero. Calculá los tres números.

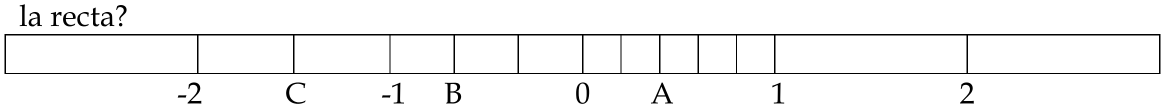
**24.** Resolvé en Z:
a) $-2.(x+5)+6:(-2)=5.(-2)+x$
b) $|-2+4:(-2)|.(x+5)=-3(x+1)+(-27):(-3)$

**25.** Resolvé en Z:
a) $-2x<4$ b) $3x+1>-5$ c) $-2|x-4|>-8$

## ***Números Racionales***

**26.** Intercalá tres números racionales entre $-\frac{2}{5}$ y - 0,1.

**27.** ¿Qué números racionales se corresponden con los puntos A, B y C marcados en la recta?



**28.** Encontrá por lo menos dos expresiones distintas de los siguientes números racionales:

a) -0,3 b) $-\,0,\hat{3}$ c) $-\,0,0\hat{1}$ d) - 2,3 e) $-\,3,\overset{\frown}{72}$

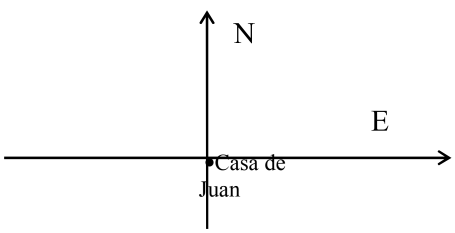
**29.** a)¿Cuál es el mayor entero que es menor que $-\dfrac{13}{4}$ ?

b) ¿Cuál es el menor entero que es mayor que $-\dfrac{13}{4}$?

**30.** Resolvé:

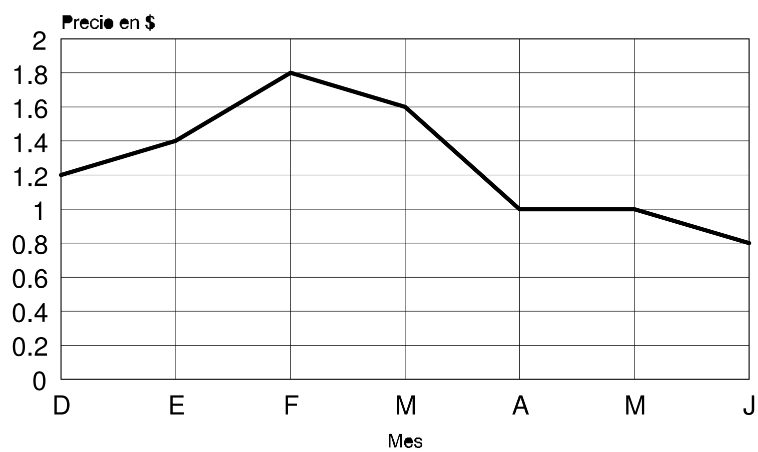
a) $-\frac{1}{5}+\left\{2-0,\hat{3}+\left[-\frac{2}{3}-(-1+0,3)\right]-1,2\right\}$ b) $0,5-\left\{-\left[-1+\frac{2}{9}-\left(-2-0,\hat{2}\right)-\frac{1}{6}\right]\right\}+\frac{5}{6}$

**31.**




Juan sale de su casa en auto y hace el siguiente camino: 100, 25 m al norte; 23,50 m al este; 28,50 m nuevamente al norte ; 50 m al oeste; 35 m al sur y 47,75 m al oeste. Considerá un sistema de referencia con origen en la casa de Juan, como lo indica la figura. Dibujá aproximadamente el camino que recorre e indicá las coordenadas del punto de llegada.

**32.** El gráfico muestra el precio de ciertas acciones durante el primer semestre de 2002.




a)Expresá la variación de dicho precio mes por mes

b) Calculá la variación semestral del mismo.

**33.** a)Completá la tabla que muestra los últimos movimientos de una cuenta bancaria

| CONCEPTOS | MOVIMIENTOS | | SALDOS |
|---|---|---|---|
| | Debe | Haber | |
| Ingreso nómina | | 245,53 | 1.596,83 |
| Recibo luz | 85,27 | | |
| Reintegro en cajero | 250 | | |
| Ingreso cheque | | 500,60 | |
| Recibo teléfono | 89,50 | | |

b) Expresá por lo menos de dos formas distintas el cálculo que te permite obtener el saldo final.

**34.** Resolvé:

a) $-0,2 + |x - 0,8| = 1,6$  b) $-|x - 2,5| + 1,3 = -2,5 - (-3,2 + 0,2)$

c) $-\frac{2}{5} + 2.(x-6) + 0,6 = x - \frac{1}{3}$

**35.** Expresá el conjunto solución en Q de las siguientes inecuaciones:

a) $-2 < x + 1,5 \leq 3,8$  b) $| x - 1,2 | > 0,8$

c) $2,7 \geq | x - 1,5 |$  d) $-\frac{1}{3} + \left|x + \frac{2}{3}\right| \leq 0,\hat{7}$

e) $|x| - 1,2 > 0,8$  f) $-\frac{1}{3} + |x| + \frac{2}{3} \leq 0,\hat{7}$

**36.** Resolvé:

a) $-\frac{1}{3}:\frac{5}{6} + 0,1 \cdot \left(-1 + \frac{2}{5}\right) =$  b) $\frac{-2 + 0,\hat{3} \cdot \frac{9}{5}}{(-2 + 4.3) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right)} - 0,2:0,4 =$

**37.** a)La diferencia entre los $\frac{16}{3}$ y los $\frac{7}{3}$ de un número es -3. ¿De qué número se trata?

b) Si se multiplica por - 0,25 la diferencia entre un número y 0,3 se obtiene 1,2. ¿De qué número se trata ?

**38.** Resolvé en Q

a) $-\frac{x}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{15}{4}$  b) $-(-0,75.y) = \frac{y}{8} + (-10)$  c) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{x}{3}$

d) $\frac{1}{6} \cdot \left(2 - \frac{z}{3}\right) = -z + \frac{2}{3}$  e) $\frac{x+1}{2} = x + 1$  f) $x.\left(\frac{3}{5} - y\right) - 1 = -\frac{2}{7} - xy$

**39.** El perímetro de un patio rectangular es de 56 m . El ancho es igual a los dos quintos del largo. Calculá el área del patio.

**40.** El perímetro del rectángulo en blanco es de 60 metros y su largo es el doble de su ancho. Calculá el área de la zona sombreada si x = 1,5 m.


**41.** ¿Cuándo se obtiene más, al tomar $\frac{5}{17}$ de los $\frac{4}{3}$ de cierta cantidad o al tomar los $\frac{3}{5}$ del 70% de la misma?

**42.** Resolver en **Q:**

a) $-2+\frac{1}{x-1}=\frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{3}x-5=\frac{x-1}{2}$

c) $\frac{2}{3x}-\frac{3}{5}=-0{,}5$

d) $0{,}3-\frac{3}{2x+5}=-6:\left(-\frac{2}{5}\right)$

e) $7\left(\frac{3}{5}x+2\right)=x.\left(\frac{3}{5}x+2\right)$

f) $2x(x-0,5).(x+1)=3x.(x-0,5)$

**43.** El vaso A contiene 100 ml de agua y el vaso B 100 ml de vino. Se pasan 10 ml de vino del vaso B al A . Se toman 10 ml de la mezcla que ahora contiene el vaso A y se pasa al B. ¿hay más vino en el agua de A o más agua en el vino de B?.

**44.** *Problemas con historia*

a) El Papiro de Rhind (siglo XVI a. C.) fue encontrado a mediados del siglo XIX en las ruinas de un pequeño edificio cerca del templo mortuorio de Ramsés II en Tebas. El copista dice llamarse Ahmose e indica que escribe en el cuarto mes de la estación de las inundaciones, del año 33 del reinado del rey Apofis. El papiro contiene 110 problemas. El siguiente es uno de ellos:

*Cierta cantidad, sus dos tercios, su mitad y un sexto de la cantidad original, sumados dan 28. ¿Cuál es esa cantidad?*

b) Bháskara fue un importante matemático hindú del siglo VIII de nuestra era. Escribió un tratado de astronomía con dos libros dedicados a la Matemática:

*Liláwati* (La hermosa) y *Vijaganita* (Aritmética). *Liláwati* era el nombre de la hija de Bháskara.

La historia cuenta que las estrellas habían presagiado muchas desgracias a *Liláwati* si no se casaba un determinado día y a una determinada hora.

Llegado el día de la boda, mientras *Liláwati* miraba impaciente el depósito de un reloj de agua que marcaría el instante exacto en que debía casarse, cayó en él una perla de su tocado sin que nadie lo advirtiera. La salida de agua del reloj quedó obstruida y la hora exacta en que debía celebrarse la boda no se marcó jamás. El novio, asustado por los astrólogos, huyó y *Liláwati* no pudo casarse.

Para consolar a la infeliz doncella, Bháskara dio su nombre a uno de los libros de Matemática que escribió.
El problema que sigue pertenece a esa obra.

*De un ramo de flores de loto, se ofreció la sexta parte a cada uno de los dioses Siva, Visnú y el Sol; una cuarta parte se le dio al amigo Bahavani, y las seis flores restantes se entregaron al venerable preceptor. Dime, rápidamente, ¿cuál es el número total de flores?*

c) El siguiente problema, denominado Los dos camelleros, apareció por primera vez en un tratado de Álgebra del matemático árabe Al - Karkhi, que vivió a principios del siglo XI.

***Camellero A: "Si tú me das un camello, tendremos el mismo número de camellos".***

*Camellero B: "Sí, y si tu me das a mí un camello, yo tendré el doble que tú".*
*Decidme, doctos matemáticos, ¿cuántos camellos tiene cada uno?*

**45.** Dos canillas, A y B, abiertas a la vez llenan un depósito en 4 horas. Si sólo se abre la canilla A, el mismo depósito se llena en 6 horas.
¿Cuánto tarda en llenarlo solo la canilla B?

**46.** El moderno auto japonés que conduce Akira partió de Oyama, ubicada en el kilómetro 20 de la ruta 875, viajando a 100 km/h con piloto automático, lo cual le asegura una velocidad constante en todo el trayecto.
a) ¿En cuánto tiempo recorrió los primeros 60 km?
b) El destino de Akira, Tokyo, era compartido por un compatriota, Tetsuo, que a la misma hora que él, por pura coincidencia, partió de su casa en Yin-Yan, en el kilómetro 0 de la misma ruta 875. El joven Tetsuo programó su auto para que anduviera a una velocidad constante de 120 km/h y llegó a Tokyo a las 5 horas y media de haber partido.
i) ¿A cuántos kilómetros se encontraba Tetsuo de su destino?
ii) ¿En cuánto tiempo Akira llegó a Tokyo?
iii) ¿En qué lugar de la ruta se encontraron? ¿A qué hora fue el encuentro?[†]

**47.** La pileta de la quinta de los Epumer, en San Miguel, mide 5 metros de ancho por 10 metros de largo y tiene una profundidad de 2 metros.
a) Si Luciana quiere averiguar cuánta agua hay en la pileta, ¿qué datos tiene que tener en cuenta? ¿Cuál de los datos puede variar?
b) ¿La pileta puede contener 150 000 litros de agua? ¿Por qué?
c) ¿Cuál es la mayor cantidad de litros de agua que puede haber en la pileta?

[†] Este problema y el siguiente son adaptaciones extraídas de Bertoa, Walter y Ferré, María; *La revuelta matemática*, Argentina, ediciones El Hacedor, 1995.

**48.** Resolvé en **Q**

a) $-2x > -0{,}4$

b) $-1{,}5x + 0{,}5 \geq -3$

c) $-0{,}5 .\ |x - 2{,}3| < -1$

d) $-2 + \frac{2}{3}x \leq -\frac{1}{6} + \frac{1}{9}x$

e) $\frac{2}{x} < -\frac{3}{5}$

f) $-\frac{2}{x} > \frac{3}{5}$

g) $\frac{2}{|x|} < 0$

h) $\frac{2}{|x|} > 0$

i) $\frac{2}{|x|+1} > 0$

j) $\frac{2}{|x+1|} > 0$

k) $(3x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right) > 0$

l) $(3x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right) < 0$

m) $(3x-1)\left(x-\frac{2}{5}\right) \leq 0$

n) $|3x-1|\left(x-\frac{2}{5}\right) < 0$

o) $|3x-1|\left(x-\frac{2}{5}\right) \geq 0$

p) $|3x-1|\left|x-\frac{2}{5}\right| > 0$

**49.** En las siguientes expresiones x e y representan números racionales. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu elección.

a) Si x.y = 0, entonces x = 0 ó y =0
b) Si x. y = 1, entonces x= 1 ó y = 1
c) Si x.y >0 , entonces ambos factores son positivos.
d) Si x.y <0 , entonces los dos factores tienen distinto signo.
e) Si x + y > 0, entonces los dos términos son positivos.

## *Síntesis*

**Números opuestos y módulo en Z y Q**

Cada número racional *a* tiene un número **opuesto** que llamamos *–a*.

El opuesto del 0 es el mismo 0.

La suma de números opuestos es 0 es decir: $a + (-a) = 0$

El módulo de un número a que se simboliza con $|a|$ es: $\begin{cases} a \text{ si } a \text{ es positivo o } 0 \\ -a \text{ si } a \text{ es negativo} \end{cases}$

En la recta numérica, $|a|$ representa la distancia de *a* al cero

Números opuestos tienen el mismo módulo, o sea, la misma distancia al cero.

La distancia entre dos números *a* y *b* es $|a-b|$

El módulo de un número es siempre mayor o igual que 0.

Si k es un número positivo y $|a| \geq k \Rightarrow a \geq k \text{ ó } a \leq -k$

Si k es un número positivo y $|a| \leq k \Rightarrow -k \leq a \leq k$

**Sobre la multiplicación y división en Q**

Regla de los signos:

El producto de dos números del mismo signo es positivo

El producto de dos números de distinto signo es negativo

La multiplicación es asociativa y conmutativa

El 1 es elemento neutro para la multiplicación ya que para cualquiera que sea *a*, *a.1=1.a=a*

Llamamos **inverso multiplicativo** de *a* a un número que multiplicado por **a** da 1, ese número es $\frac{1}{a}$.

Todos los números racionales, salvo el 0, tienen inverso multiplicativo que también es racional.

Definimos la **división a:b** al producto de a por el inverso multiplicativo de b (que por lo dicho anteriormente, debe ser distinto de 0), o sea: $a : b = a.\frac{1}{b}$

La división cumple, entonces, la misma regla de los signos que la multiplicación.

***Leyes cancelativas para la multiplicación***

$a = b \Rightarrow a.c = b.c$ además, $cuando\, c \neq 0\; y\; a.c = b.c \Rightarrow a = b$

$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a.c < b.c \;\; si\, c > 0 \\ a.c > b.c \; si\, c < 0 \end{cases}$ si $c = 0 \;\; y \;\; a < b \Rightarrow a.c = b.c$

La multiplicación es distributiva respecto de la suma o resta, entonces se verifica que:

$a.(b + c) = a.b + a.c$

$(a + b).(c + d) = a.c + a.d + b.c + b.d$

y como caso particular: $\begin{array}{l} (a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + 2a.b + b^2 \\ (a+b).(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}$

Cuando estas igualdades se aplican de izquierda a derecha, decimos que estamos **"ditribuyendo"**.

Cuando las aplicamos de derecha a izquierda, decimos que estamos **"factorizando"**, es decir, estamos reescribiendo una expresión que tiene como operación principal suma o resta, como expresión que tiene como operación principal multiplicación.

## *Trabajo Práctico 5: Triángulos*

**1.** ¿Cuántos triángulos con lados de longitud entera. pueden construirse si la longitud del mayor es
i) 5? ii) 6? iii) 7 ?

**2.** Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justificá
a) Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes, entonces son congruentes.
b) Si dos triángulos tienen un lado y un ángulo adyacente respectivamente congruentes, entonces son congruentes.
c) Si dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

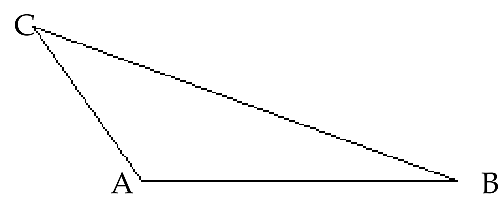
**3.** Construí para cada caso, un triángulo que cumpla las siguientes condiciones:

a) Un lado mida 3 cm, otro lado mida 4 cm. El ángulo comprendido mida 30º

b) Un lado mida 4 cm y los ángulos adyacentes a él midan 30º y 45º, respectivamente.

c) Los lados midan 5 cm, 2cm y 6 cm respectivamente.

**4.** Considerá el triángulo ABC y construí el triángulo A´B´C´ teniendo en cuenta los siguientes casos:




a) $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|, |\overline{B'C'}| = |\overline{BC}|$ y $|\hat{B}'| = |\hat{B}|$

b) $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|, |\hat{A}'| = |\hat{A}|$ y $|\hat{B}'| = |\hat{B}|$

c) $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|, |\overline{B'C'}| = |\overline{BC}|$ y $|\overline{A'C'}| = |\overline{AC}|$

e) $|\overline{A'C'}| = |\overline{AC}|, |\overline{B'C'}| = |\overline{BC}|$ y $|\hat{A}'| = |\hat{A}|$

**5.** Construí dos triángulos distintos tales que las medidas de dos de sus lados **a** y **b** sean: 2 y 6 cm respectivamente y el ángulo opuesto a **a,** mida 20º

**6.** Justificá cada una de las siguientes proposiciones:

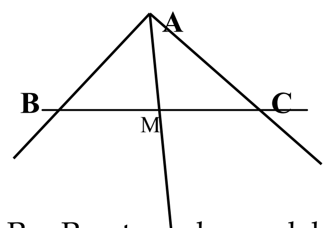
a) Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

b) Si un punto del plano equidista de los extremos de un segmento, entonces pertenece a su mediatriz.

c) Si un punto interior a un ángulo equidista de sus lados, entonces pertenece a la bisectriz del mismo.

d) Si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo , entonces equidista de los lados del mismo.

**7.** En la figura , M es el punto medio de $\overline{BC}$.
Demostrá que B y C equidistan de la recta AM




**8.** En $\overset{\Delta}{ABC}$, las bisectrices de $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se cortan en P. Por P se traza la paralela a BC que corta al $\overline{AB}$ en D y a $\overline{AC}$ en E. Si $\left|\overline{BD}\right| = 5{,}3; \left|\overline{CE}\right| = 7{,}8$ (en cm), calculá $\left|\overline{DE}\right|$. Justificá.

**9.** Demostrá que en todo triángulo isósceles la altura correspondiente a la base es a la vez mediana.

**10.** Dibujá un triángulo cualquiera y construí sobre él:

a) las tres alturas. Se cortan ellas o sus prolongaciones?
b) Las tres mediatrices. Se cortan?
c) Las tres medianas. Se cortan?
d) Las tres bisectrices de los ángulos interiores. Se cortan?

**11.** Demostrá que en todo triángulo:

a) el punto de intersección de las bisectrices equidista de los lados del mismo.
b) El punto de intersección de las mediatrices equidista de los vértices del mismo.

## *Síntesis*

Dos triángulos son congruentes cuando tienen todos sus lados respectivamente congruentes y todos sus ángulos respectivamente congruentes.
En triángulos congruentes a los lados que se corresponden en esa congruencia se los denomina "homólogos".
También se llaman homólogos a los pares de ángulos que se corresponden en una congruencia.

Propiedad de los lados de un triángulo:
En un triángulo, la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos, y mayor que su diferencia.

Relación entre lados y ángulos.
En un triángulo, a mayor lado, se opone mayor ángulo
En un triángulo, a mayor ángulo, se opone mayor lado

Criterios de congruencia de triángulos:
Para asegurar la congruencia de dos triángulos, no es necesario que se muestre que todos los lados homólogos son congruentes y que todos los ángulos homólogos son congruentes, ya que es suficiente que se conozca la congruencia de algunos de éstos elementos para poder probar la congruencia del resto.
Los criterios de congruencia son esas condiciones de suficiencia:
LAL:Es suficiente que dos triángulos tengan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes, para que sean congruentes.
ALA: Es suficiente que dos triángulos tengan un lado y los dos ángulos adyacentes al mismo respectivamente congruentes, para que sean congruentes.
LLL: Es suficiente que dos triángulos tengan los tres lados respectivamente congruentes, para que sean congruentes
LLA:Es suficiente que dos triángulos tengan dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos congruentes, para que sean congruentes

Propiedad:
En triángulos congruentes, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes
En triángulos congruentes, a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.

Puntos notables del triángulo:
- La tres alturas de un triángulo concurren en un punto que se denomina ORTOCENTRO
- Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto que se denomina CIRCUNCENTRO y equidista de los vértices del triángulo.
- Las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto que se denomina INCENTRO y equidista de los lados del triángulo.
- Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto que se denomina BARICENTRO y se encuentra a $\frac{2}{3}$ de mediana de cada vértice.

# *Trabajo Práctico 6: Potencias y raíces*

## *A. Potenciación*

**1**. ¿Cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado? ¿Porqué?

a) $3^5 =$ $\qquad$ $5^3 =$

b)$(2 + 4)^2 =$ $\qquad$ $2^2 + 4^2=$

$(-3+4)^3 =$ $\qquad$ $(-3)^3 + 4^3 =$

c) $3^2.6^2=$ $\qquad$ $(3.6)^2 =$ $\qquad$ $(-2)^4.(-3)^4=$ $\qquad$ $[(-2).(-3)]^4=$

$(12 : 3)^2 =$ $\qquad$ $12^2 : 3^2 =$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$ $\qquad$ $\frac{3^2}{4^2}=$

**2**. Sabiendo que "x"es un número negativo e "y" es un número positivo, indicá , en cada caso, el signo del resultado:

a) $x^3$ $\qquad$ b) $(x.y)^2$ $\qquad$ c) $-(-x)^3.y^3$ $\qquad$ d) $(-y)^3$

**3**. Resolvé sin calculadora:

a) $(-1)^{159}=$ $\qquad$ b)$(-83456)^0 =$ $\qquad$ c) $(-0,3)^3 =$

d)$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} =$ $\qquad$ e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $\qquad$ f)$(-0,3)^{-3} =$

**4**. Expresá los siguientes enunciados en forma simbólica y resolvé:

a) El doble del cuadrado de un tercio.

b) Tres quintos del cuadrado de cinco.

c)El cuadrado de la diferencia entre los tres quintos de cinco y uno

d)La diferencia entre los cuadrados de los tres quintos de cinco y uno

**5**. Resolvé aplicando las propiedades de la potenciación**:**

a) $2^2.2^5 . 2^3 =$ $\qquad$ b) $(-3).(-3)^2.(-3)^3.(-3) : (-3)^4 : (-3)$

c) $(-3)^0.(-3)^{12}:[(-3)^3]^4$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^5:\left(\frac{2}{5}\right)$

e) $2x \,.\, 2x^2.\,(2x)^2$

f) $\left[\frac{3^2}{3^{-5}}:\left(3^{-1}:3^3\right)\right]^{-2} =$

g) $\left[\left(m \,.\, m^2\right)^{-3}\right]^2:\left(m^3\right)^{-2}$ , $(m \neq 0)$

h) $\left(\frac{m^{-2} \,.\, m^5}{(m^{-1})^{-3}}\right)^2:\frac{m}{m^{-5}}$, $(m \neq 0)$

**6**. Resolvé sin calculadora:

a) $\left(1-83\cdot\frac{5}{3}\right)^0+\frac{\left(3^5\right)^3:\left(3^{-4}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =$

b) $\left[(0,\overset{\frown}{3})^{-1}.(0,0\overset{\frown}{6})^{-2}\right]^{-1}:\left(6+\frac{3}{2}\right)^{-2}.3 =$

**7.** Resolvé expresando todos los factores y divisores como potencias de un mismo número y aplicando propiedades de la potenciación.

a) $\left[(0,5)^3.4^2\right]^{-3}:\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}.16\right]^{-1}$

b) $\frac{(0,2)^{-1}25}{\left(\frac{1}{125}\right)^{-1}}\cdot\frac{\left(5^{-1}\right)^{-2}}{(0,008)^2} =$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.(0,125)^2\right]^{-3}:\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}.32\right]^{-1} =$

**8**. Indicá cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo número racional x:

a) $\left(2x^2\right)^3 = 4x^6$

b) $\left(-\frac{3}{5}x\right)^{-1} = \frac{5}{3x}$

c) $(-2x-1)^3 = -(2x+1)^3$

d) $(2.x)^2 = 2.x^2$

e) $(-2x-1)^2 = -(2x+1)^2$

f) $(x-1)^2 = x^2-1^2$

**9.** Verificá que se cumple la siguiente igualdad para todo valor de x :
$(2x-3)^2 - 3^2 = 4x.(x-3)$

**10**. Resolvé:

a) $(a + b)^2 =$

b) $(a - b)^2 =$

c) $(-a - b)^2 =$

d) $(a + b).(a - b) =$

e) $(x-3).(x+3) =$

**11.** ¿Será verdad?
Si n es un número natural par, entonces $n^2 - 1$ es el producto de dos naturales impares consecutivos.

**12**. Comprobá que la diferencia entre números cuadrados consecutivos es un número impar.

**13**. Escribí el número siete como diferencia entre dos cuadrados consecutivos.

**14.** Traducí el enunciado mediante una ecuación y resolvé: ¿Cuál es el número tal que la diferencia entre su cuadrado y su mitad supera en 6 unidades a su producto por el número anterior?

**15.** Resolvé en Q las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

a) $(x + 1) . ( x - 1 ) + 5 x = (x - 5 )^2 - 6$

b) $(x - 3 )^2 + 7 x \geq 2 x + ( x - 3 ) . ( x - 5 )$

c) $(1 - 2x)(1 + 3x) + (2 - x)^2 = 5.\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{3}$

d) $(1 - 2x) ( 1 + 2x)+ 5.(x-3) = 8x-(1+2x)^2$

e) $5-(x-3).(x-2)=2.(x+5)-(-1-x)^2$

f) $(x + 3)^2 -(x + 3).(x - 3) = x + 5$

g) $4^2 .4^x =4^7$

h) $2^3 : 2^x = 2^0$

i) $\left(4^3\right)^x = 64$

j) $(1 - 2x)^2 -(x^5 :x^4)^2= 3x.(x+2)$

k) $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)^3 = 0$ (*)

l) $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)^3 > 0$ (*)

ll) $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)^3 \leq 0$ (*)

(*) Ejercicios optativos

**16.** Extraé todos los factores comunes y expresá como producto cada una de las siguientes sumas:

a) $2.a^2 + 4.a^3 - 8.a^4$

b) $3.m^2.n - 6.m^3.n^2 + 9.m.n^3$

c) $\frac{5}{4}c^3 - 25.c^2 + \frac{5}{8}c^4$

d) $-18 x^2mb^3 + 45 x^5m^3b^3+27x^4m^2b^7$

**17**. Resolvé en **Q** las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - x = 0$  b) $12\,x^2 = 4x$  c) $x^3 - x^2 = 0$  d) $3x(x+2) = (x+2)^2$

**18**. Completá los espacios en blanco

a) $\frac{25}{3} - 3\,y^2 = 3.\left(\ ....\ \right) = 3.\left(\frac{5}{3} + \cdots\cdots\ \right).\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$

b) $4\,a^2 - 9 = (\ .... + .....).(......-........)$

c) $25\,a^2 - 10ab + .......... = (\ .....\ -\ .........)^2$

d) $4b^2 + 2ab + \ldots\ldots. = (2b + \ldots\ldots)^2$

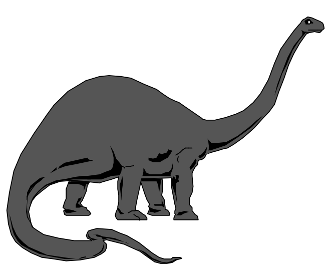
**19.** Resolvé en **Q** las siguientes ecuaciones:

a) $(2x+1)^2 - (3x)^2 = 0$  b) $(2x+1)^3 - 5(2x+1)^2 = 0$  c) $(2x+3)^2 + 2x.(2x+3) = 0$

d) $(3x+2).(5x+1) - 3x.(5x+1) = 1$  e) $(5x)^2 - (3x+1)^2 = 0$

***Para escribir números muy grandes o muy chicos***

**20.** Leemos en un artículo científico acerca de la evolución de la vida sobre la tierra:



**Los primeros dinosaurios aparecieron sobre la Tierra en el período Jurásico del Mezozoico, hace aproximadamente $1{,}5.10^8$ años y se extinguieron a fines del Cretácico, $7{,}5.10^7$ años después. Su peso era de aproximadamente $6{,}5.\ 10^3$ kg.**

Contestá utilizando números enteros:

a)¿Hace cuántos años que aparecieron los dinosaurios sobre la Tierra?

b)¿Cuántos años hace que se extinguieron?

c)¿Cuál era en Kg,el peso aproximado de un dinosaurio?

**21.**

| **Planeta** | **Distancia media al Sol (en km)** | **Masa en relación al Sol** |
|---|---|---|
| **Mercurio** | **11.000.000** | **$1{,}25.10^{-7}$** |
| **Tierra** | **150.000.000** | **$3.10^{-6}$** |
| **Marte** | **228.000.000** | **$3{,}23.10^{-7}$** |
| **Saturno** | **1.427.700.000** | **$2{,}86.10^{-4}$** |
| **Neptuno** | **5.919.000.000** | **$5{,}19.10^{-5}$** |

La primera columna de la tabla, corresponde a las distancias medias al Sol, de algunos planetas de nuestro sistema Solar. La segunda, informa acerca de la masa de los mismos, tomando como unidad la masa solar.

a)Escribí las distancias medias entre los planetas de nuestro sistema y el Sol como producto de una potencia de 10 por un número comprendido entre 1 y 10 b)Encontrá la expresión decimal de la medida de la masa de cada planeta en relación a la masa del Sol.

**22.**Expresá en notación científica los siguientes números:
a) 48000 b) 0,000008 c) 2345 d) 234,50

**23.**Supongamos que la Tierra está totalmente formada por arena y que es una esfera de 6500 km de radio. Si 100 granos de arena ocupan 1 $mm^3$ ¿Cuántos granos de arena habría en la Tierra? ($\pi \cong 3{,}14$)(Vol. de la esfera= $\frac{4}{3}.\pi.r^3$ )

**24.**La masa de un virus es $10^{-21}$ kg, la de un hombre 70 kg. ¿Qué porcentaje de la masa del hombre representa, aproximadamente, la del virus?

**25.**Escribí en notación científica, la equivalencia en metros de las siguientes unidades de longitud: a) 1 micrón (1 $\mu$) (es la milésima parte de un milímetro)

b) 1 angstrom (1 $\mathring{A}$) ( es la diez millonésima parte de un milímetro)

**26.** Escribí cada uno de los siguientes números en notación científica
a) 0,000000003 b) 0,00000000000231 c)2153 d) 2.390.000.000

## B. Radicación

**27.** Resolvé:

a) $\left(\sqrt{16}+\sqrt[3]{27}\right):\sqrt[5]{32}.\sqrt{25}=$

b) $\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\sqrt[3]{8}=$

c) $\dfrac{\left(2^3-\sqrt{9}\right)^2}{\sqrt{5^2-4^2}}=$

d) $\sqrt[3]{\left(-0,5-0,\widehat{9}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}-2\right)}=$

e) $\dfrac{\sqrt{-1+125.10^{-2}}.(-1+11.3^{-2})^{-1}}{0,8.(10+5.2^{-1})}+\sqrt[3]{-1+3^2.2^{-3}}=$

f) $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}}+\frac{5}{4}}{1-\sqrt[10]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{4}\right)^3}}=$

**28.** Calculá:

a) $\sqrt[3]{(-3)^3}=$

b) $\sqrt[3]{(-2)^6}=$

c) $\sqrt[3]{2^3}=$

d) $\sqrt[3]{2^{12}}=$

e) $\sqrt{2^4}=$

f) $\sqrt{(-2)^2}=$

¿Qué conclusión podés sacar acerca de la relación entre la simplificación de exponentes e índices, el signo de la base de la potencia y el carácter de par o impar del índice?

Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n}$ = ....... , para cualquier $a \in Q$, positivo o negativo.

Si n es par y $a \in Q^+$ (es decir , es un número racional positivo): $\sqrt[n]{a^n}$ =

si n es par y $a \in Q^-$ **(**es decir , es un número racional negativo): $\sqrt[n]{a^n}$ =

**29.** Resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $(x+1)^5 - 1 = 31$

b) $2 + \sqrt{x} = 7$

c) $\sqrt[3]{4 - \frac{x}{3}} = -\left(-\frac{1}{3}\right) : \left|-2-(-1)\right|$

d) $4 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = 4 : \frac{5}{4}$

e) $(x^2 - 4).(x^3 + 1) = 0$

f) $\frac{(3x-2)^2}{4} = 16$

g) $(x - 1)^4 = 625$

h) $\frac{5}{\sqrt[3]{x^2+2}} + \left(\sqrt{(-5)^2 - 4^2}\right)^{-1} = (-5)^5 : \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} . \left(-\frac{2}{125}\right)$

i) $(2.\sqrt{x} - 1)^2 - x = 2.(1 - 2\sqrt{x})$

**30.** Resolvé en Q las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 8 > 1$

b) $\frac{1}{x^2} \leq 9$

c) $(-3x + 2)^2 - 4 < 0$

d) $\frac{1}{x^3 - 1} > \frac{1}{7}$

e) $2 - x^2 > 1$

f) $1 - (2-x^2)^2 < -3$

g) $3 - 5x^3 < (3^2)^{-1}. 3^3$

h) $3 - 5x^2 < (3^2)^{-1}. 3^3$

i) $5 - (-2-3x)^2 < -4$

j) $(x+2).(x-3) < -x + 10$

k) $-4 + (2-2x)\ (x-5) + (3-2x)^2 = x^2 + (2^2)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^8$

l) $\frac{-3}{\sqrt[3]{-x+2}} + \sqrt{2 - 2^{-2}.\ 7} = -\frac{5}{2}$

m) $3 - \frac{1}{5}(4-x)^2 > -2$

**31.** Resolvé las siguientes ecuaciones:

a) $(x+6)^7+3=2190$

b) $(x+9)^6=64$

c) $-5+\sqrt{x}=11$

d) $\dfrac{(12x+3)^2}{2}=72$

e) $(x^4-625)(x^3+27)=0$ (*)

f) $(x^6-64)(x^5-1024)=0$ (*)

g) $(x^2+4)(x^7+1)=0$

h) $\sqrt{61-x^2}=6$

i) $\sqrt{x^2+51}=10$

j) $(7\sqrt{x}+3)^2-11x=7(4+6\sqrt{x})$

(*) Ejercicios optativos

**32.** Resolvé en $\mathbb{Q}$ las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-17<-1$

b) $(10x-9)^2-9>0$

c) $-27+x^2>-2$

d) $-|2|+x^5<-248+|3|$

e) $-18-9x^2<-(6^3)^{-1}6^5\text{-}2.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

f) $(x-6)(x+4)<-2x+1$

g) $(x+7)(x-10)>-3x+11$

h) $29-(11-7x)^5<-3$

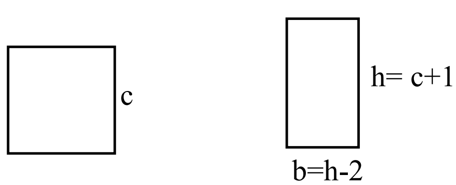
i) $18-(-14+5x)^2<-7$

j) $-82-(8x+19)^3<647$

k) $19+(14x-3)^7>147$

l) $(x+9)(x-12)>-3x-8$

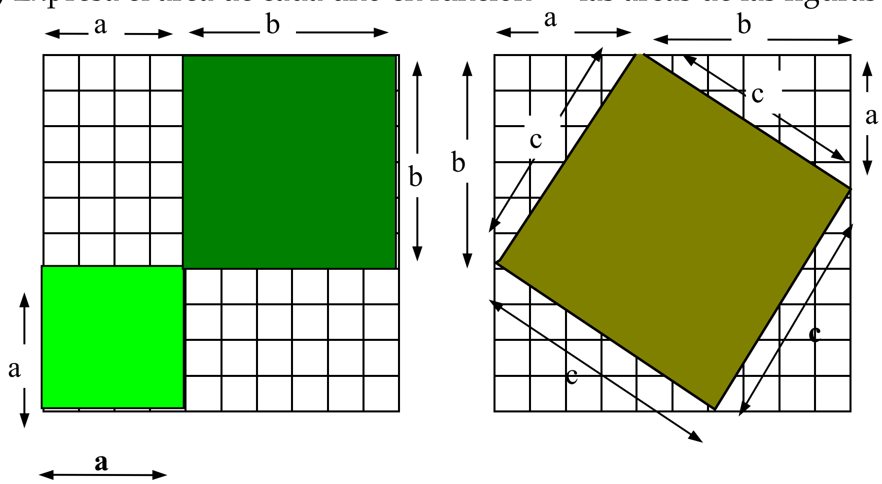
**33.** La medida del lado de un cuadrado es **"c"**. La altura de un rectángulo supera en una unidad a **"c"** y su base es dos unidades menor que la altura.
Calculá los perímetros de ambas figuras si la suma de las áreas es 49.



**Teorema de Pitágoras**

**34.** Los cuadrados grandes son congruentes.

**a)** Expresá el área de cada uno en función de las áreas de las figuras que los forman .



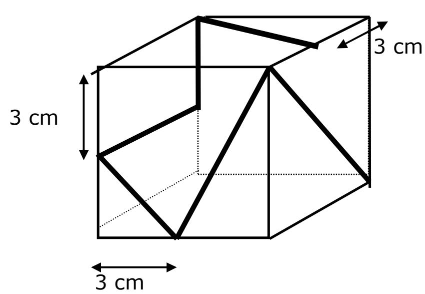

**b)** Establecé la igualdad entre las áreas calculadas en a)

**c)**¿Qué conclusión podés extraer?

**35.** Las bases de un trapecio isósceles miden 13cm y 7 cm respectivamente. Calculá su área sabiendo que el perímetro es de 30 cm.

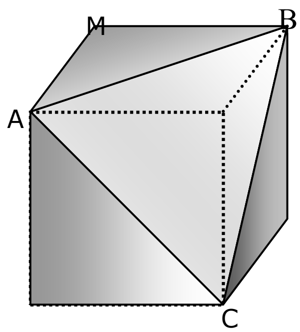
**36.** Eliana camina 2 km al norte, luego 5 al este; vuelve a marchar hacia el norte, otros 4 km y finalmente retoma el rumbo este para recorrer 3 km más. Calculá la distancia entre el punto de partida y el de llegada.

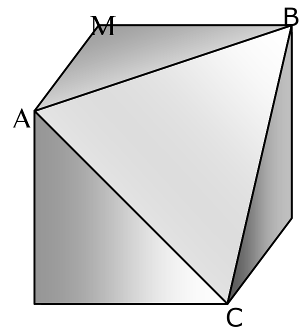
**37.** Las aristas de una caja que tiene forma de paralelepípedo recto miden: 10 cm, 6cm y 3 cm. Hacé un dibujo y calculá la medida de la diagonal.




Una hormiga se mueve sobre un cubo cuya arista mide 6 cm, tal como lo indica la figura. Calculá la longitud del camino. ¿Cuál es la longitud del camino que recorre la hormiga?

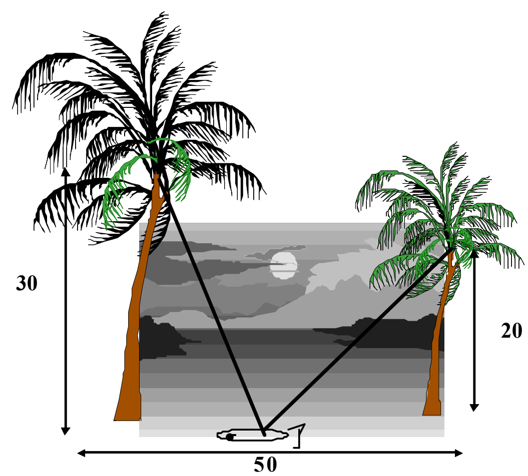
**38.** Al serruchar un cubo de madera por $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ (diagonales de tres caras del mismo), se obtiene el cuerpo truncado que se representa en el dibujo. Calculá el área total de dicho cuerpo sabiendo que la arista $\overline{AM}$ mide 3 cm.




**39. Las aves de la orilla‡**
(De la obra de un matemático árabe del siglo XI)

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a otra. La altura de una es de 30 codos, y la de otra de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito, los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzan a la misma velocidad y alcanzan al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?




‡Perelman, Y. *Álgebra Recreativa*. Ed. Latinoamericana. Lima,1988

## Algunas definiciones y propiedades

Consideremos: $a \in$ Q y $n \in$ **N:**

- Si $a \neq 0$ : $a^0=1$
- Para todo a: $a^1 = a$
- Para $n>1$: $a^n = \underbrace{a.a\cdots a}_{n\ \text{veces}}$
- Si $a \neq 0$ : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

***La potencia no es distributiva respecto de la suma y de la resta***

***<u>Algunas propiedades de la potencia</u>***

La potencia es distributiva respecto de la multiplicación y la división

$(a.b)^n = a^n.b^n$ $\quad\quad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}\ (con\, b \neq 0)$

Potencias de igual base:

$a^n.a^p = a^{n+p}$

$a^n : a^p = a^{n-p}$

$(a^n)^p = a^{n.p}$

Si a y b son números racionales y n es un número natural, se verifica:

$a = b \Rightarrow a^n = b^n$

$$a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} a = b & si\ n\, es\, impar \\ |a| = |b| & si\, n\, es\ par \end{cases}$$

$n = p \Rightarrow a^n = a^p$

$a^n = a^p \Rightarrow n = p\ \ (si\, a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1)$

***Notación científica***

*Para expresar números muy grandes o muy pequeños suele utilizarse la notación científica*
*Un número está escrito en notación científica cuando está expresado como el producto de una potencia de 10 por otro número que, en valor absoluto, es mayor o igual que 1 y menor que 10*

Si el valor absoluto del número es mayor que 1, la potencia de 10 es de exponente positivo. Si en cambio, su valor absoluto es menor que 1, el exponente de 10 es negativo.

***Radicación***

*Si **n ∈ N** y **n > 1,** afirmar que, la raíz **enésima** de un número racional **a** es el número racional **b,** es equivalente a asegurar que **a** es la potencia enésima de **b**.*

*En símbolos:*

$$\text{Si } a \in Q,\ n \in N,\ n \geq 2: \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

*(La raíz enésima de un número racional **a**, puede no existir, pero si existe, es única. Por convención, si existe más de un valor de **b** que verifique la condición pedida, se adopta como raíz enésima de **a**, al valor positivo de **b**) .*

*Se indica:* $\sqrt[n]{a} = b$

*n: índice de la raíz a:radicando b: raíz enésima* $\sqrt{\ }$ *:radical*

*La raíz de índice 2 se llama raíz cuadrada y en general no se escribe el índice. La de índice 3 , se llama cúbica.*

## *La radicación no es distributiva respecto de la suma y de la resta*

**Algunas propiedades de la radicación :**

**Cuando cada radical existe:**

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \quad y \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (con\, b \neq 0)$$

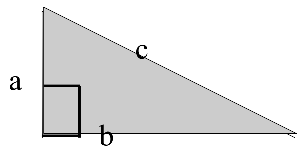
$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n.p]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & si\ n\, es\, impar \\ |a| & si\ n\, es\ par \end{cases} \qquad \text{en cambio, } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

*Teorema de Pitágoras*

***En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.***




$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

# *Trabajo Práctico 7 : Cuadriláteros*

**1.** Demostrá que en todo paralelogramo se cumple que:

a) los lados opuestos son congruentes

b) los ángulos opuestos son congruentes.

c) las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes.

**2.** Enunciá y demostrá las propiedades recíprocas de las mencionadas en el problema 1.

**3.** Probá que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

**4.** Probá que:

a)Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces es un rectángulo.

b) Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

c)Si un paralelogramo tiene sus diagonales congruentes entonces es un rectángulo.

**5.** Sea $\overset{\Delta}{BAC}$ un triángulo rectángulo en A y $\overline{AM}$ la mediana correspondiente a la hipotenusa. Demostrá que $\overset{\Delta}{AMC}$ es isósceles.

**6.** Demostrá que:

a) Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos congruentes, entonces es un rombo.

b) Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

c) Si las diagonales de un paralelogramo se cortan perpendicularmente, entonces es un rombo.

d) Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

e)Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen, entonces es un rombo.

**7.** Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no. Justificá

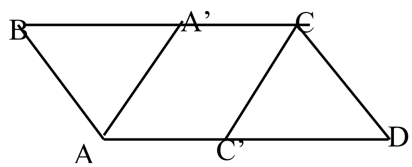
a)Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces es un rectángulo.

b) Si las diagonales de un rombo son congruentes, entonces es un cuadrado.

c) Si en un cuadrilátero cada diagonal está incluida en la mediatriz de la otra, entonces es un rombo.

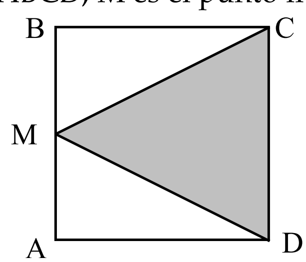
**8.** Demostrá que si el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero equidista de los vértices, entonces es un rectángulo.

**9.** En el dibujo, ABCD es un paralelogramo y $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ son las bisectrices de $\hat{A}$ y $\hat{C}$ respectivamente. Demostrá que AA'CC' es un paralelogramo.




**10.** Sea ABCD un paralelogramo. Se consideran M y T pertenecientes a $\overline{AC}$ tales que BM $\perp$ AC y DT $\perp$ AC. Demostrá que BTDM es un paralelogramo.

**11.** En el cuadrado ABCD, M es el punto medio de $\overline{AB}$. Probá que $\overset{\Delta}{MCD}$ es isósceles.




**12.** Considerá en el paralelogramo ABCD, M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{CD}$. Probá que MNCB es un paralelogramo.

**13.** Considerá $\overset{\Delta}{ABC}$, M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{BC}$. Probá que:

a) $\overline{MN} \;//\; \overline{AC}$

b) $\left|\overline{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$

**14.** a) ¿Qué tipo de cuadrilátero determinan los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera? Justificá.

b) Demostrá que el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados de un rombo es un rectángulo.

c) Demostrá que el cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados de un rectángulo es un rombo.

**15.** Para construir un cuadrilátero se sigue el siguiente procedimiento:

I)Se traza un segmento $\overline{AB}$ .

II) Se construye la mediatriz de $\overline{AB}$ (m).

III) Se considera un punto cualquiera $P \in$ m y se lo une con A y con B.

IV) Por B, se traza r// PA

V) Por A, se traza t//PB

VI) t y r se cortan en Q

a)¿Podés asegurar que el cuadrilátero PAQB es un paralelogramo? ¿Por qué?

b)¿Podés asegurar que el cuadrilátero PAQB es un rectángulo? ¿Por qué?

c)¿Podés asegurar que el cuadrilátero PAQB es un rombo?¿Por qué?

**16.** Si $\overline{MN}$ es base media del trapecio ABCD con respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, siendo AB// CD, probá que:

a) MN // AB

b) $\left|\overline{MN}\right| = \dfrac{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{CD}\right|}{2}$

**17.** Demostrá que en un romboide:

a) las diagonales se cortan perpendicularmente.

b) la diagonal principal está incluida en la bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.

**18.** Se reduce en un 10% la longitud de un par de lados opuestos de un cuadrado y se incrementa en un 10% la del otro par. ¿Qué variación experimenta el área del cuadrado?

## *Definiciones*

- Un cuadrilátero es un *trapecio* si y sólo si tiene al menos un par de lados opuestos paralelos.

  Llamaremos *trapecio isósceles* al trapecio no paralelogramo en el que los lados opuestos no paralelos son congruentes.

- Un cuadrilátero es un *paralelogramo* si y sólo si tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos.

- Un cuadrilátero es un *rombo* si y sólo si tiene sus cuatro lados congruentes.

- Un cuadrilátero es un *rectángulo* si y sólo si tiene sus cuatro ángulos rectos.

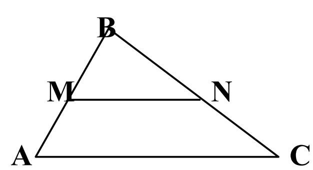
- Un cuadrilátero es un *cuadrado* si y sólo si es rectángulo y es rombo.

- Un cuadrilátero con dos lados consecutivos congruentes y los otros dos, distintos de los anteriores, pero congruentes entre sí se denomina *romboide*
  La diagonal que une los vértices a los que concurren los lados congruentes se llama *diagonal principal.*

## *Bases Medias*

**De un triángulo:**

Los segmentos que unen los puntos medios de dos lados de un triángulo se llaman *bases medias del triángulo.*

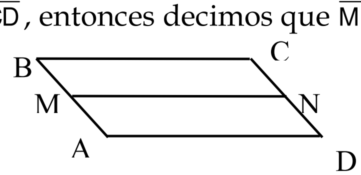



M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{BC}$ $\Rightarrow$MN base media de $A\overset{\Delta}{B}C$

Un triángulo tiene tres bases medias

**De un paralelogramo:**

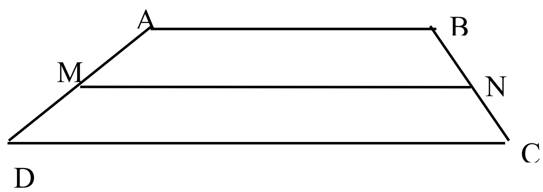
Si en el paralelogramo ABCD, consideramos M punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{CD}$, entonces decimos que $\overline{MN}$ es *base media del paralelogramo.*




Un paralelogramo tiene dos bases medias

**De un trapecio:**

Si ABCD es un trapecio con AB // DC , M es punto medio de $\overline{AD}$ y N punto medio de $\overline{BC}$, decimos que $\overline{MN}$ es *base media del trapecio* con respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

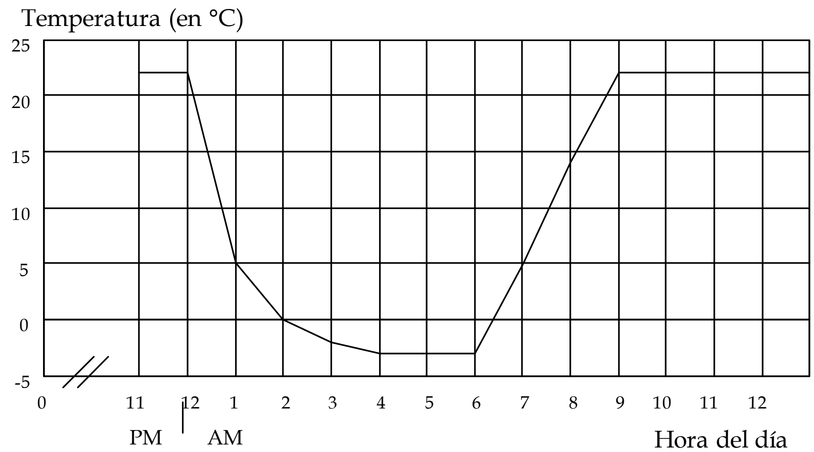



Un trapecio tiene una base media

## *<u>Trabajo Práctico 8</u>: Nociones de Estadística*

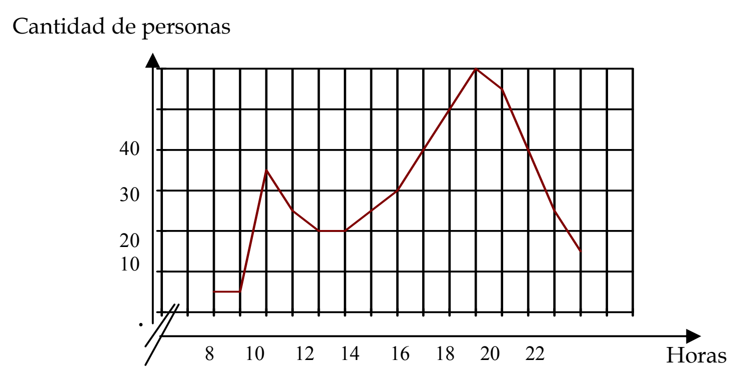
### A) Para leer e interpretar gráficos

**1.** El siguiente gráfico muestra la temperatura de una habitación durante una noche de invierno en Ushuaia.



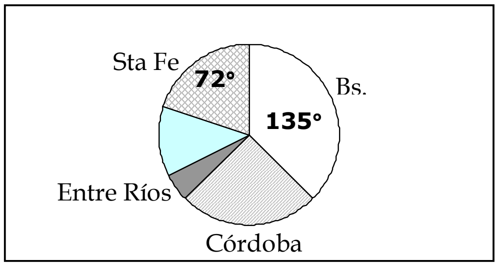

a) ¿Durante cuánto tiempo estuvo apagada la calefacción?
b) ¿Cuál es, aproximadamente, la temperatura de la habitación después de las 9 de la mañana?
c) ¿Cuándo la temperatura es de 5°C?
d) ¿Cuándo la temperatura es menor que 15°C?
e) ¿Cuál es, aproximadamente, la temperatura entre la 1 y las 3 de la mañana?

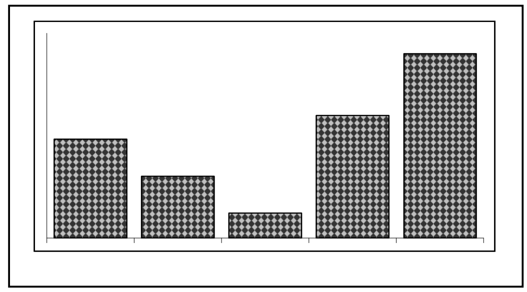
**2.** El gráfico que figura a continuación representa la actividad de un supermercado desde la apertura hasta la hora de cierre.




a) ¿Cuántas personas ingresaron al abrir sus puertas el supermercado?
b) ¿Cuáles son los horarios de mayor cantidad de clientes?
c) ¿Cuántas personas permanecen en el local a las 12 horas?

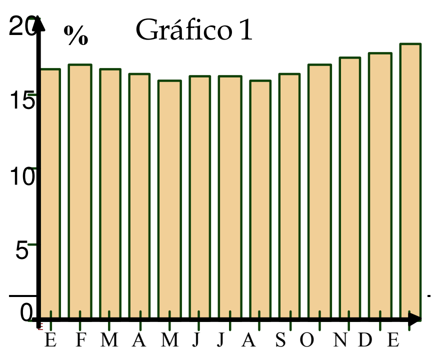
**3.** Los siguientes gráficos muestran la distribución, según la provincia de origen, de los 120 chicos que participaron en una competencia deportiva. En el gráfico de barras se han borrado los nombres de las provincias y las referencias de la escala.

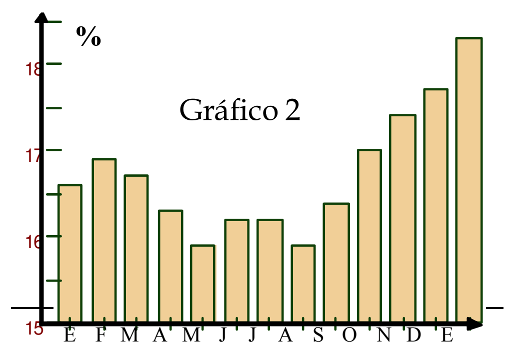


Completá los datos del gráfico de barras sabiendo que el número de chicos que participaron por Entre Ríos equivale a la cuarta parte de los que participaron por Santa Fe, o a la quinta parte de los que participaron por Córdoba.

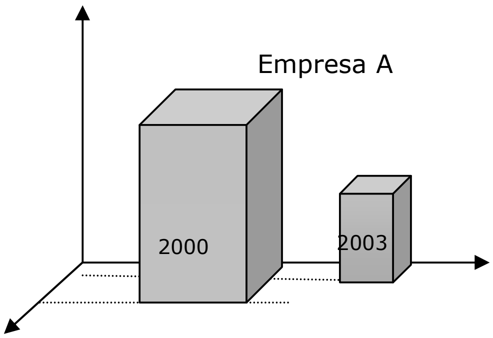
**4.** En un diario oficialista, apareció publicado un gráfico que ilustraba un artículo sobre la desocupación. El diario de la oposición, mostrando también un gráfico, publicó ese mismo día un editorial sobre el mismo tema.

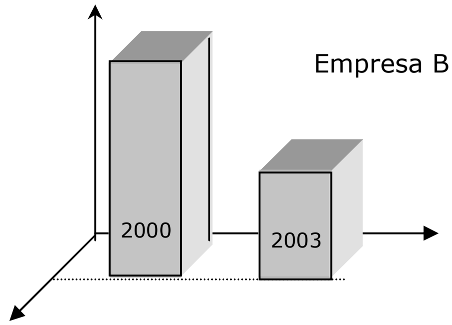


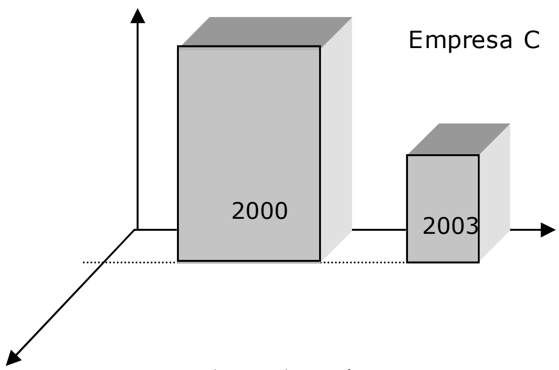




a) Indicá cuál de los gráficos creés que publicó cada uno de los diarios.
b) Escribí un título para cada una de las notas periodísticas.
c) Explicá cuál de los gráficos te parece más veraz y por qué.

**5.** Los gerentes de tres empresas, A, B y C, informaron que, dada la crisis económica que afectó al país hace unos años, la producción durante el primer semestre de 2003 fue la mitad de la correspondiente al mismo semestre del año 2000.
En su exposición, cada uno de ellos presentó uno de los siguientes gráficos para mostrar lo dramático de la situación.




¿Cuál de los tres gerentes utilizó el gráfico correcto?

***B) Estadística***

**6.** En Francia se publicó una estadística sobre los lugares de las casas en que se producen los accidentes de los niños:

| Escaleras | Cocinas | Baños | Patios y jardines | Dormitorios | Salas de juego y garages | Otros |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10% | 27% | 4% | 22% | 8% | 20% | 9% |

a) Representá la información dada en la tabla mediante un gráfico de barras.
b) Si la encuesta fue realizada entre los familiares de 164 chicos accidentados, ¿cuántos chicos, aproximadamente, sufrieron los accidentes en cada uno de los ambientes de la casa?

**7.** Determiná en cuáles de los siguientes estudios estadísticos debe tenerse en cuenta toda la población y en cuáles debe elegirse una muestra.
a) La altura media de los chicos argentinos de 13 años.
b) La nota media de las calificaciones de Juan durante el primer trimestre.
c) La familia con más hijos de la manzana en la que se encuentra tu casa.
d) La calidad de los electrodomésticos de una determinada marca.

**8.** Se desea encuestar a 400 personas de una población de 11 000 hombres y 9000 mujeres. ¿A cuántos hombres y a cuántas mujeres encuestarías?

**9.** Un profesor tomó una evaluación a un grupo de 25 alumnos.
La tabla muestra la cantidad de alumnos que obtuvo cada puntaje:

| Calificación | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de alumnos | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 | 3 |

a) Calculá el promedio, la moda y la mediana de la distribución.
b) Construí un gráfico de barras con los datos de la tabla.
c) Confeccioná la tabla de frecuencias relativas.
d) ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvieron nota inferior a 7 puntos?
e) ¿Cuál es la nota por sobre la cual se encuentra aproximadamente el 25% del grupo?
f) Juan había estado ausente el día de la evaluación. Después de tomarle la prueba, el profesor comentó: "Con esta prueba, la distribución de frecuencias es *bimodal*".
¿Qué nota obtuvo Juan en la evaluación? Explicá tu respuesta.

**10.** En un parque de diversiones se registró la cantidad de ocupantes por auto que ingresaron a él durante un cierto tiempo. Con la información obtenida se confeccionó la siguiente tabla:

| Número de ocupantes | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 7 | 11 | 7 | x |

Calculá el o los posibles valores de x para cada uno de estos casos:
a) si la media del número de ocupantes por auto es $\frac{7}{3}$.
b) si la moda es 2.
c) si la mediana es 2.

**11.** Entre 20 colegios que participan anualmente en un torneo de fútbol se presenta la siguiente situación: si jugaran todos, una vez como local y otra como visitante, el torneo sería muy extenso. Debido a esto, se decide hacer dos divisiones según la calidad de los equipos y tomar los puntajes obtenidos por cada uno de ellos en el último torneo para determinar cuáles son los 10 mejores y los 10 inferiores. Dichos puntajes son los siguientes:
38 32 41 30 35 51 40 34 17 55 18 46 19 48 58 34 25 40 62 37
Uno de los organizadores del torneo propone usar el promedio para realizar la división de los equipos. ¿Te parece adecuado utilizarlo? ¿Por qué? Usá tu iniciativa para resolver la situación planteada.

**12.** En un club, se toma una muestra representativa de la composición por edades de los socios y se anotan estos valores:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 25 | 33 | 13 | 4 | 6 | 7 | 28 | 26 | 33 | 5 | 6 | 34 | 17 | 21 |
| 27 | 32 | 7 | 33 | 26 | 23 | 11 | 14 | 12 | 15 | 16 | 17 | 13 | 12 | 23 |

Además, se establecen las siguientes categorías:
Infantiles: de 4 a 10 años
Cadete menor: de 10 a 16 años
Cadete mayor: de 16 a 22 años
Juvenil: de 22 a 28 años
Activo: de 28 a 34 años

a) Confeccioná una tabla de distribución de frecuencias por intervalos.
b) Realizá el histograma correspondiente a dicha distribución.
c) ¿Qué parámetro usarías para determinar en qué categoría es conveniente organizar más actividades?

**13.** En la empresa *Privilegios S.A.* se realizó una reunión para analizar los salarios. Los sueldos según el cargo desempeñado eran los siguientes:

Gerente: $9000
Subgerente: $5000
Asesor: $2500
Los dos secretarios: $1350 c/u
Capataz: $1200
Los seis operarios: $600 c/u

En la reunión, la empresa afirmó que el salario medio era de $2000, el delegado gremial sostuvo que el sueldo representativo era de $600 y un político consultado aseguró que el salario más representativo era de $900.
¿Qué parámetro tuvo en cuenta cada participante de la reunión para argumentar?

***Síntesis***

El objetivo principal de la estadística es realizar inferencias (predicciones, decisiones, etc.) acerca de ciertas características de una población a partir de información contenida en una muestra de la misma

La **Estadística descriptiva** consta de los procedimientos para resumir la información de un conjunto de datos (**población o muestra**). Existen métodos gráficos y métodos numéricos.
La **población** es el conjunto de individuos que es de interés considerar.
**Muestra** es una parte de la población e individuo es un elemento de la población.

Un estudio realizado sobre la población se llama **censo** y cuando el estudio se realiza sobre una muestra se llama **muestreo.**

Las características que se estudian en una muestra o población se llaman **variables.** Las variables pueden tomar distintos **valores**.
Por ejemplo: en la variable "Color de ojos" , algunos valores de la misma serán: castaños, azules, verdes, etc.
En la variable "Número de hijos por familia", algunos de los valores pueden ser: 1, 2, 3 etc.

Las variables se clasifican de acuerdo al tipo de valor que se les asigne a través de una medición

**Las variables cualitativas**: Arrojan respuestas categóricas. Son atributos, condiciones o cualidades que poseen un individuo. Están asociadas a los niveles de medición nominal y ordinal. Por ejemplo: "Color de ojos", "Sexo", etc.

**Las variables cuantitativas**: Arrojan respuestas numéricas. Están asociadas a una escala de medida o de razón. A su vez, pueden clasificase en:
**Discretas**: son en general, respuestas numéricas que provienen de un proceso de conteo. Son discretos porque la variable puede adoptar sólo ciertos valores aislados de la recta numérica, generalmente se asocian al conjunto de los números naturales o a un subconjunto del mismo. Por ejemplo: "Número de hijos por familia".
**Continuas**: surgen en general de un proceso de medición. Son continuos porque la variable puede adoptar todos los valores dentro de un cierto rango del conjunto de los números reales. Por ejemplo: "Altura de la persona".

Los valores asociados a cada individuo constituyen **la población de observaciones o datos**, si sobre un mismo individuo se observan varias variables, una población de individuos da origen a varias poblaciones de observaciones.

**Las tablas de frecuencia** sirven para ordenar los datos de una muestra y permiten que la lectura de la información sea más clara. En una tabla de frecuencias encontramos las siguientes simbolizaciones.
n: es el tamaño de la muestra.
fa: **frecuencia absoluta**, que indica la cantidad de veces que ocurre cada valor de la variable en la muestra.
fr: **frecuencia relativa**, indica la fracción del total de la muestra que corresponde al valor de la variable.
fp: **frecuencia porcentual**, indica el porcentaje del total de elementos de la muestra que corresponde a cada valor de la variable.
fac: **frecuencia acumulada**, indica la frecuencia absoluta que se acumula hasta la fila de la tabla que se calcula.

Las representaciones gráficas se asocian al tipo de variables que se quiere visualizar. Los más usuales son:

**Gráfico circular**: se utiliza para analizar la participación de cada categoría de la variable en el total de la muestra y es muy útil para representar variables medidas en una escala nominal, como ser: estado civil, sexo, nivel de estudios.
**Gráfico de barras**: se utiliza para representar tablas de frecuencias de variables cualitativas o cuantitativas discretas.
**Histogramas**: se utiliza para representar tablas de frecuencias que están expresadas por intervalos, es decir variables cuantitativas continuas.
**Gráfico de línea**: Se utiliza para analizar la evolución de la variable en el tiempo. Si bien se parece al gráfico de funciones continuas no lo es porque no representan una relación funcional entre las variables (por ej: evolución de la cantidad de turistas a lo largo de los años).

**Medidas descriptivas calculadas únicamente a partir de los datos.**

**Moda o modo:** El modo de un conjunto de n observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es el valor de x que ocurre con mayor frecuencia.

**Media aritmética**: Sea $x_1, x_2, \ldots, x_N$ el conjunto de datos poblacionales ( N es el tamaño de la población) entonces se define la media poblacional como

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

**Mediana:** La mediana de un conjunto de n observaciones $x_1, x_2, \ldots x_n$ es el valor de x tal que a lo sumo el 50% de las observaciones es menor que x y a lo sumo el 50% de las observaciones es superior a x.
La mediana es menos sensible que la media a observaciones extremas.
Si $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ representa el conjunto de observaciones ordenadas de menor a mayor entonces:
a) si n es impar, $x_{Md}$ es la observación central, $x_{Md} = x_{(n+1)/2}$ ,
b) si n es par, $x_{Md}$ es el promedio de las dos observaciones centrales $x_{Md} = (x_{n/2} + x_{n/2+1})/2$

Éstas medidas se definen en forma similar cuando se trabaja sobre una muestra de la población.

# *Respuestas*

| TP | Problema o Ejercicio | |
|---|---|---|
| **1** | 2 | a) 1/4 b) 3/4 c) 5/4 d) 1/2 |
| | 3 | $\frac{1}{2500}$ |
| | 6 | a) 20% b) 500% c) 85%<br>d) 0,45% e) 1/6 f) 150% |
| | 7 | a) 33% (aprox) b) 66% (aprox) |
| | 8 | La segunda es más conveniente, porque tiene un 10% de descuento, contra un 9% (aprox) de la primera. |
| | 9 | a) 3; b) $\frac{11}{90}$; c) $\frac{19}{18}$.d) $\frac{47}{6}$; e) $\frac{5}{24}$. |
| | 10 | a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{8}{15}$; c) 15 000 metros |
| | 11 | Las 2 primeras farmacias hacen un 72% de descuento. |
| | 12 | a) 50 y 20 b) 16 000 personas c) 7800$ |
| | 13 | a) $x = 2$; b) $y = 5$; c) $x = 0,5$; d) $x = \frac{8}{7}$; e) $m = \frac{3}{2}$; f) $x = 0,5$; g) $x = \frac{32}{5}$; h) $z = 0$;<br>i)$p = \frac{5}{3}$; j) $x = \frac{4}{5}$; k) $x = \frac{5}{12}$; l) $u = 5$;<br>m) no tiene solución , n) Todo valor de x |
| | 16 | n no debe ser múltiplo de 11. |
| | 17 | es exacta |
| | 20 | a) 0,25; b) $\frac{29}{168}$. |
| | 21 | a) $z = \frac{16}{21}$; b) $z = \frac{10}{21}$. |
| **2** | 2 | a)60°; b)45°; c)97°30′ ; d)53°20′ ; e)56°40′ ; f)60°; g) 21°40′ |
| | 5 | F V V V V V F |
| | 6 | Las bisectrices de ángulos adyacentes siempre son perpendiculares |
| | 7 | Las bisectrices de ángulos opuestos por el vértice siempre forman un ángulo llano |
| | 8 | a) 40° y 40° ; b) 80° y 100° |
| | 14 | V F V F V V V |
| | 15 | a) quedan tres ángulos de 48º y cuatro de 132º<br>b) alfa y delta miden 60º, beta 120º.<br>c) 108º y 72º |
| | 16 | 16.1 $\lvert Q\hat{T}R \rvert = 140^{\circ}$ y $\lvert A\hat{B}M \rvert = 40^{\circ}$ ; 16.2 $\lvert \delta \rvert = \lvert \pi \rvert = 70^{\circ}$ |
| | 17 | a)$\lvert\delta\rvert=137^{\circ}$ ;b)$\lvert\delta\rvert=170^{\circ}$ |
| | 18 | i) paralelas<br>ii) a) suplementarios b) congruentes |
| | 19 | paralelogramo |
| | 21 | 55° 23´5″,83º4´37″ y 41º 32´18¨ |
| | 22 | a) 6 b) 720º<br>c) Las medidas de los dos interiores no adyacentes suman la medida del exterior |
| | 23 | a) x=25º b) x= 24° |

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $\left\|B\hat{O}C\right\| = 105°$ |
| | 25 | 60°30´; 62° y 57°30´ |
| | 31 | a) 45°; b) 8 lados; c) 12 lados |
| | 32 | Los ángulos de ABCDE miden 130°, 80°,160°,20° y 150° respectivamente. |
| | 33 | a) \|A\| =\|C\|=120°, \|B\|=\|D\|=60° ; b)\|A\| =\|C\|=130°, \|B\|=\|D\|=50° |
| | 34 | \|R\|=120°, \|S\|=110°, \|V\|=60°; \|U\|=70° |
| **3** | 1 | vacío, vacío, {9}, {4,5,7,8,10}, {4,5,7,8,10} |
| | 3 | a) 14 b) 6 |
| | 5 | a) 2; b) 1; c) 6; d) 9. |
| | 6 | a) 0; b) 3; c) 27. |
| | 7 | a) i) 15; ii) 45; iii) 90; iv) 70; b) 47,37%; 23,68% y 28,95%. |
| | 8 | a) 9; b) 1; c) 3. |
| | 9 | 10 |
| | 10 | 35 |
| | 11 | a) 120; b) 48. |
| | 12 | a) 0,973; b) $\frac{1}{3}$ ; c) $\frac{57}{75}$ . |
| | 13 | b) i) 0,37; ii) 0,4. |
| | 14 | $\frac{1}{378}$ |
| | 15 | a) $\frac{7}{12}$ ; b) 0; c) 1 |
| | 16 | a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{8}$ ; c) $\frac{7}{8}$ ; d) $\frac{1}{4}$ . |
| | 17 | :a) $\frac{7}{12}$ ; b) $\frac{1}{4}$ ; c) $\frac{3}{4}$. |
| | 18 | a) $\frac{1}{6}$ ; b) $\frac{1}{2}$ ; c) $\frac{5}{6}$ . |
| | 19 | $\frac{1}{3}$ |
| | 20 | $\frac{19}{26}$ |
| | 21 | $\frac{5}{7}$ |
| **4** | 3 | a) {-1,0,1,2} b) {...,-4,-3,4,5,...}<br>c) {...-6,-5,5,6,...} d) {-1,0,1,2,3}<br>e) {-6,-5,-4,-3} f) {-3,-2,-1,0,1,2,3} |
| | 6 | a) 0;b)-8a; c)4;d)-7; e)3a+4b |
| | 7 | 19797m |
| | 8 | 814; 75; -384; 75; -69 |
| | 9 | a) x=8; b)x=3 ó x= -3; c)x=-13; d)x=8 ó x=-2; e) x=1 |
| | 11 | el vértice es -555 |
| | 13 | i) a = -12 y b = 27 ii) a = 7 y b = -8 iii) a = -1 y b = -3 ó a = -7 y b = 3 |
| | 14 | a) {-1}; b){1}; c) $\{ z \in Z / z \leq -3 \text{ ó } z \geq 3\}$ ; d){-23,23}; e){-4,4}; f) $\{x \in Z / x > 1\}$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | g){-2,4} ; h) Z ; i) $\{b \in Z / -5 \leq b \leq 5\}$ ; j) $\varnothing$ ; k) { $x \in Z / x \leq -7$ ó $x \geq -3$} ;<br>l) $\{b \in Z / -1 \leq b \leq 5\}$ |
| | 15 | i) F ii) V |
| | 16 | a) 14; b) –22+a ; c)-2 –3a +8b; d) 15 – 3x |
| | 17 | a) 5a(5b-3c+8) b) 6axy(1+2z-3b)<br>c) (3x-5)(2+4b-6c) d) (m-n)(3+12c-4b) |
| | 18 | a) $<$ b) $>$ c) $>$ |
| | 19 | a) $<$ b) $>$ c) $>$ d) $<$ |
| | 22 | a) x=-6; b)x=4; c)x= -2;d) $\{x \in Z / x < -2\}$ ;e) $\{x \in Z / -2 < x < 2\}$;<br>f) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\}$, g) $\{x \in Z / x \geq 4 \, o \, x \leq -4\}$;h) $\{x \in Z / -1 \leq x \leq 1\}$;<br>i) $\{x \in Z / x > -4\}$;j) $\{x \in Z / x > 8 \, o \, x < -6\}$, k) {1,2,-3} ; l) x=0 ó y=0 ó z=0 ; m) {-2,3};<br>n) {-2,-1}; ñ) x=0 ó y=1; o) {-5,1}; p) $\{x \in Z / x > 0 \, o \, x < -5\}$; q) $\{x \in Z / -5 < x < 0\}$<br>r) $\{x \in Z / x \geq 0 \, o \, x \leq -5\}$ , s) $\{x \in Z / x < -5\}$; t) $\{x \in \mathbb{Z} / x = 0 \text{ o } x \leq -5\}$, u) {0,-5} |
| | 23 | -24,-12 y -30 |
| | 24 | a) x= -1 , b) x= -2. |
| | 25 | a) $\{x \in Z / x > -2\}$;b) $\{x \in Z / x > -2\}$; c) $\{x \in Z / 0 < x < 8\}$ |
| | 30 | a) 0,3 ; b) $\frac{47}{18}$ |
| | 31 | 93,75 N 74,25 O |
| | 34 | a) x = 2,6 ó x = -1 b)x = 3,3 ó x = 1,7 c) x= $\frac{172}{15}$ |
| | 35 | a) $\{x \in Q / -3{,}5 < x \leq 2{,}3\}$ ;b){ $x \in Q / x > 2$ ó $x < 0{,}4$ };<br>c) $\{x \in Q / 1{,}2 \leq x \leq 4{,}2\}$ ; d) $\left\{x \in Q / -\frac{16}{9} \leq x \leq \frac{4}{9}\right\}$;<br>e) $\{x \in Q / x > 2 \; o \; x < -2\}$ , f) $\left\{x \in Q / -\frac{4}{9} \leq x \leq \frac{4}{9}\right\}$ |
| | 36 | a) $-\frac{23}{50}$ b) $-\frac{33}{80}$ |
| | 37 | a) -1 b) -4,5 |
| | 38 | a)x=-15/8; b)y= -16; c)x= -8; d) z= 6/17 e) x= -1; f) x= 25/21; y $\in$ Q |
| | 39 | 160m² |
| | 40 | 99m² |
| | 41 | la segunda |
| | 42 | a) $x = \frac{18}{13}$; b) x=27; c) $x = \frac{20}{3}$; d) $x = -\frac{255}{98}$; e)x=7 ó x= $-\frac{10}{3}$; f)x=0 ó x= $\frac{1}{2}$ |
| | 43 | es igual |
| | 44 | a) 12 b) 24 flores. C) El camellero A tiene 5 camellos y B, 7 camellos |
| | 45 | 12 horas |
| | 46 | a) En 36 minutos; b) i) A 660 km; ii) En 6 horas 24 minutos; iii) Se encontraron a |

| | | |
|---|---|---|
| | | 120 km del kilómetro 0 y lo hicieron una hora después de haber partido. |
| | 47 | la pileta tiene una capacidad de 100 000 litros |
| | 48 | a) $\left\{x \in Q / x < \frac{1}{5}\right\}$; b) $\left\{x \in Q / x \leq \frac{7}{3}\right\}$; c) $\{x \in Q / x > 4{,}3 \ o \ x < 0{,}3\}$ <br> d) $\left\{x \in Q / x \leq \frac{33}{10}\right\}$; e) $\left\{x \in Q / -\frac{10}{3} < x < 0\right\}$;f) $\left\{x \in Q / -\frac{10}{3} < x < 0\right\}$; <br> g) $\varnothing$; h) $Q - \{0\}$; i)Q ;j) $Q - \{-1\}$; k) $\left\{x \in Q / x > \frac{2}{5} \ o \ x < \frac{1}{3}\right\}$ ; <br> l) $\left\{x \in Q / \frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}\right\}$; m) $\left\{x \in Q / \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{5}\right\}$ ;n) $\left\{x \in Q / x < \frac{2}{5}\right\}$; <br> o) $\left\{x \in Q / x \geq \frac{2}{5} \ o \ x = \frac{1}{3}\right\}$ ; p) $Q - \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$ |
| | 49 | V F F V F <br> HASTA ACA |
| **5** | 1 | i) 9 ii) 12 iii) 16 |
| | 2 | F F F |
| | 8 | 13, 1 cm |
| **6** | 2 | a) negativo b) positivo c) negativo d) negativo |
| | 3 | a) -1 b) 1 c) -0,027 d) 9/4 e) -27/8 f) -1000 /27 |
| | 4 | a) 2/9 b) 15 c) 4 d) 8 |
| | 5 | a) 1024; b) 9; c) 1; d) $\frac{16}{625}$; e) 16 $x^5$; f) $3^{-22}$; g) $m^{-12}$; h) $m^{-6}$ |
| | 6 | a) 4; b) $\frac{1}{4}$. |
| | 7 | a) 16; b) $5^8$ =390 625 ; c) $2^{20}$ =1 048 576 |
| | 8 | c) |
| | 10 | a) $a^2+2ab+b^2$ b) $a^2-2ab+b^2$ <br> c) $a^2+2ab+b^2$ d) $a^2-b^2$ e) $x^2-9$ |
| | 11 | verdadero |
| | 14 | 12 |
| | 15 | a)x= $\frac{4}{3}$ ;b) $\left\{x \in Q / x \geq \frac{6}{7}\right\}$ ;c)x= $-\frac{1}{9}$; d) x=13; e) x=2; f) x=5; ; g) x=3; h) x=1; <br> i) x= $-\frac{13}{5}$; j) x=0,1; k)x= 0,6 ó x= $-\frac{1}{3}$; l) $\left\{x \in Q / x > -\frac{1}{3}\right\}$; ll) $\left\{x \in Q / x \leq -\frac{1}{3} \ o \ x = \frac{3}{5}\right\}$ |
| | 17 | a) x=0 ó x=1 ; b) x =0 ó x = $\frac{1}{3}$ ; c) x=0 ó x=1 ; d) x= -2 ó x=1 |
| | 19 | a)x = -0,2 ó x = 1; b) x= -0,5 ó x= 2 ; c) x= - 1,5 ó x = -0,75 ; d) x= -0,1 |
| | 20 | a) 150 000 000 b) 75 000 000 c) 6500 |
| | 21 | a) $1{,}1.10^7$; $1{,}5.10^8$; $2{,}28.10^8$; $1{,}4277.10^9$; $5{,}919.10^9$ <br> b) 0,000 000 125; 0,000 003; 0,000 000 323; 0,000 286; 0,000 051 9 |
| | 22 | a) $4{,}8.10^4$ b) $8.10^{-6}$ c) $2{,}345.10^3$ d) $2{,}345.10^2$ |
| | 23 | $1{,}15.10^{30}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $1{,}43.10^{-21}$ |
| | 25 | a1) $1.10^{-6}$ m a2) $1.1^{-10}$m |
| | 26 | $3.10^{-9}$; $2{,}31.10^{-12}$;<br>$2{,}153.10^{3}$; $2{,}39.10^{9}$ |
| | 27 | a) 17,5 ; b) $-\frac{5}{6}$;c) $\frac{25}{3}$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{29}{40}$; f)-3,5 |
| | 29 | a)S= {1}; b)S={ 25} ; c) $S=\left\{\frac{107}{9}\right\}$; d) S={3 , -3} ; e) S={-2,-1,2};<br>f) $S=\left\{-2,\frac{10}{3}\right\}$ g) S={6,-4}; h)S={-5,5}; i) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ |
| | 30 | a) $\{x\in Q/x<-3 \ o \ x>3\}$ ; b) $\left\{x\in Q/x\leq-\frac{1}{3} \ o \ x\geq\frac{1}{3}\right\}$ ; c) $\left\{x\in Q/0<x<\frac{4}{3}\right\}$<br>d) $\{x\in Q/1<x<2\}$; e) $\{x\in Q/-1<x<1\}$;f) $\{x\in Q/x<-2 \ o \ x>2\}$; g) $Q^{+}$ ;<br>h) $Q-\{0\}$;i) $\left\{x\in Q/x<-\frac{5}{3} \ o \ x>\frac{1}{3}\right\}$ ,j) $\{x\in Q/-4<x<4\}$; k){-3,3}; l){1};<br>m) $\{x\in Q/-1<x<9\}$. |
| | 31 | a)x= -3; b)x=-7 ó x= -11; c)x=256; d) x= $-\frac{5}{4}$ ó x= $\frac{3}{4}$;e) x=-5 ó x= -3 ó x= 5; f)x= -2 ó x= 2 ó x= 4 ; g)x= -1; h) x=-5 ó x= 5; i) x= -7 ó x= 7;<br>j) x= 0,5 |
| | 32 | a) $\{x\in Q/-4<x<4\}$; b) $\left\{x\in Q/x>\frac{6}{5} \ o \ x<\frac{3}{5}\right\}$; c) $\{x\in Q/x>5 \ o \ x<-5\}$;<br>d) $\{x\in Q/x<-3\}$; e) $\{x\in Q/x>2 \ o \ x<-2\}$;f) $\{x\in Q/-5<x<5\}$;<br>g) $\{x\in Q/x>9 \ o \ x<-9\}$;h) $\left\{x\in Q/x<\frac{9}{7}\right\}$ ; i) $\left\{x\in Q/x>\frac{19}{5} \ o \ x<\frac{9}{5}\right\}$,<br>j) $\left\{x\in Q/x<-\frac{7}{2}\right\}$; k) $\left\{x\in Q/x>\frac{5}{14}\right\}$ ; l) $\{x\in Q/x>10 \ o \ x<-10\}$ |
| | 33 | El perímetro de ambas figuras es 20. |
| | 35 | 40 cm2 |
| | 36 | 10 Km |
| | 37 | 12,04 cm (aprox) y 35,14 cm (aprox) |
| | 38 | 48,29 cm2 |
| | 39 | 20 codos. |

# *Matemática 1° año*

## Programa analítico

**UNIDAD 1: N**úmeros racionales no negativos

- Revisión del concepto de fracción no negativa y porcentaje. Representación de racionales no negativos.
- Adición, sustracción, multiplicación y división en $\mathbb{Q}_0^+$. Resolución de problemas y ecuaciones.
- Expresiones decimales exactas y periódicas. Conversión en fracción.

**UNIDAD 2:** Ángulos

- Definición de ángulo convexo. Ángulos complementarios y suplementarios. Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice.
- Ángulos entre rectas cortadas por una transversal. Propiedades cuando las rectas son paralelas.
- Suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo y de un polígono. Propiedad del ángulo exterior.

**UNIDAD 3:** Conjuntos, conteo y probabilidades

- Noción de conjunto, elemento y pertenencia. Diagramas de Venn. Operaciones con conjuntos: unión, intersección , diferencia y complementación.
- Problemas de conteo. Diagrama de árbol.
- Definición clásica de probabilidad. Resolución de problemas.

**UNIDAD 4:** Números racionales (Primera parte)

- El conjunto Z de los números enteros. Representación. Orden . Adición, sustracción , multiplicación y división. Factorización. Valor absoluto. Ecuaciones e inecuaciones. Resolución de problemas.
- El conjunto Q de los números racionales. Orden. Densidad. Adición, sustracción, multiplicación y división. Factorización. Ecuaciones e inecuaciones. Resolución de problemas.

**UNIDAD 4: Triángulos**

- Criterios de congruencia de triángulos. Aplicación a la demostración de propiedades del triángulo

- Alturas, medianas , mediatrices y bisectrices en un triangulo. Propiedades.

**UNIDAD 6:** Números racionales ( Segunda parte)

- Potenciación. Propiedades. Cuadrado de un binomio. Diferencia de cuadrados. Factorización. Notación científica.
- Radicación. Propiedades. El caso de $\sqrt{x^2}$ .
- Ecuaciones e inecuaciones.
- Teorema de Pitágoras.

**UNIDAD 7:** Cuadriláteros

- Definiciones y propiedades de paralelogramos, paralelogramos especiales, trapecios y romboides. Demostraciones

**UNIDAD 8:** Nociones de Estadística

- Lectura , interpretación y construcción de distintos tipos de gráficos.
- Población y muestra. Tipos de variables. Frecuencias absoluta y relativa.
- Distribución por intervalos. Histogramas.
- Media, mediana y moda en casos simples.

# Más problemas ingeniosos

***Aquí incorporamos un conjunto de problemas correspondientes al primer nivel de Olimpíadas matemáticas.***

1. ¿Cuál es el menor número natural m tal que 936m es cuadrado perfecto?

2. Se tiene varios números que son múltiplos de k. Probar que si se escribe uno a continuación del otro da un múltiplo de k.

3. De los números del 1 al 1000, ¿cuántos son divisibles por 5 o por 9 pero no por ambos?

4. En un conjunto de cinco números el promedio de los tres primeros es 15 y el de los dos últimos es 10. ¿Cuál es el promedio de los cinco números?

5. Tres apostadores A, B y C pronostican el resultado de cinco partidos de fútbol. (L = local, E = empate y V = visitante). Los tarjetas presentadas fueron:

| L | E | V |
|---|---|---|
| X | | |
| X | | |
| | X | |
| | X | |
| | | X |
| Jugador A | | |

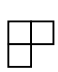
| L | E | V |
|---|---|---|
| | | X |
| | X | |
| X | | |
| | X | |
| X | | |
| Jugador B | | |

| L | E | V |
|---|---|---|
| X | | |
| X | | |
| | | X |
| X | | |
| | X | |
| Jugador C | | |

Finalizando los partidos se observó que los apostadores obtuvieron: A, tres aciertos; B tres aciertos; C, dos aciertos.

Construir una tarjeta con cinco aciertos.

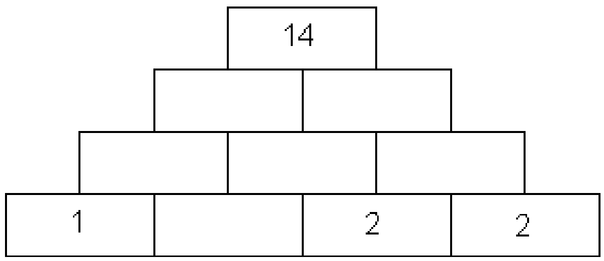
6.Tenemos un tablero de 6x6, ¿cuál es la mínima cantidad de casillas que hay que pintar para que no se pueda ubicar una ficha -de la forma que muestra la figura- sobre tres casillas sin pintar?



Aclaración: vale rotar la ficha.

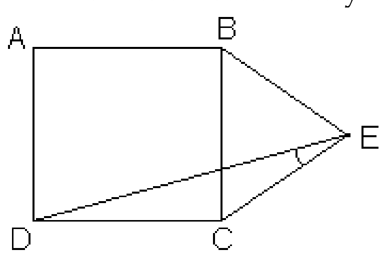
7. Un juego para dos personas comienza con una pila de 21 piedras. Cada jugador en su turno puede quitar una o dos piedras. Gana el que se lleva la última. Determinar cuál de los dos jugadores (el primero o el segundo) tiene una estrategia ganadora.

8. En el tablero de la figura hay cuatro casillas ocupadas.




Escribir en cada una de las seis casillas vacías un número (no necesariamente entero) de modo que una vez completo el tablero con los 10 números, se verifique que el número escrito en cada casilla sea igual a la suma de los dos números escritos en las dos casillas sobre las que está apoyada.

9. ABCD es un cuadrado y BCE un triángulo equilátero.




Hallar la medida del ángulo CED.

10. Sea ABC un triángulo y r la recta paralela a BC que pasa por A. Sea P el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ABC. Sea Q el punto de intersección entre r y la bisectriz del ángulo ACB. AB mide 7 y AC mide 8. Hallar la medida de PQ.

11. Sea ABCD un cuadrado y M el punto medio de AB. Sea P la intersección de BD con MC. Hallar el área del triángulo MBP.

12. ABCD es un rectángulo. P un punto cualquiera sobre el lado BC. Sea Q el punto sobre AP tal que DQ es perpendicular a AP. AB=5, AD=3. Hallar el producto de las medidas AP y DQ.