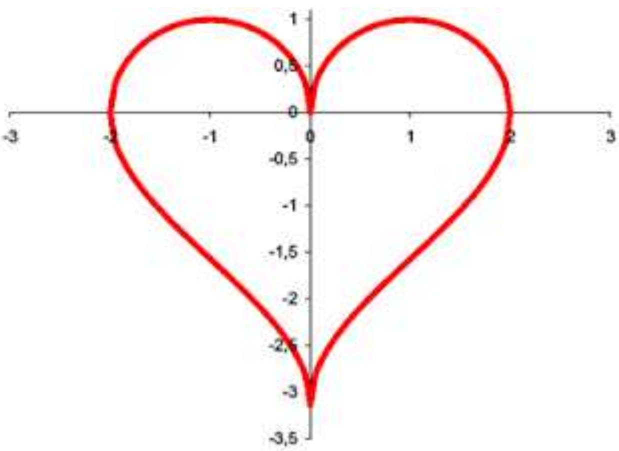
Colegio Nacional de Buenos Aires

MATEMÁTICA DE 3er AÑO

Guía de Trabajos Prácticos



2025

PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO 2025

Unidad 1: Función lineal.

Función lineal. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Intersección de rectas. Problemas. Funciones lineales definidas por tramos. Función módulo.

Unidad 2: Función cuadrática.

Función cuadrática. Traslaciones y simetrías. Raíces. Ecuación de segundo grado. Movimientos. Intersección de parábola con recta.

Unidad 3: Las funciones polinómicas.

Ceros de una función polinómica. Multiplicidad de las raíces. Clasificación de funciones. La función biyectiva y su inversa.
Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini, Teorema del resto. Divisibilidad. Resolución de ecuaciones. Teorema de Gauss. Descomposición factorial de un polinomio. Clasificación. Movimientos. Representación aproximada de funciones polinómicas a partir de ceros, intervalos de positividad y negatividad.

Unidad 4: Las funciones racionales e irracionales

Función racional. Función homográfica. Operaciones con expresiones algebraicas racionales. Ecuaciones. Problemas. Funciones irracionales. Problemas.

Unidad 5: Álgebra de funciones.

Igualdad de funciones. Suma, producto, cociente de funciones. Composición de funciones.

Unidad 1: Funciones de variación uniforme – Ecuación de la recta

Función de variación uniforme. Problemas en contexto. Ecuaciones e inecuaciones lineales.

1) Un barril tiene una capacidad de 100 litros. El barril se encuentra sobre una balanza y al echarle distintas cantidades de un aceite, se puede tomar el peso que registra la misma. Se registró que al echar 10 litros de aceite la balanza marca 36kg y cuando marca 39kg hay 15 litros de aceite.

a) ¿Es cierto que cuando hay 20 litros de aceite la balanza marcará 42kg?
b) ¿Qué marcará la balanza al echar 7,5 litros de aceite en el barril?
c) Completá la siguiente tabla:

Volumen de aceite (en litros)	Peso del barril con el aceite (en kg)
0	
7,5	
10	36
15	39
17,5	
20	
22	
	48
	55,5
46	

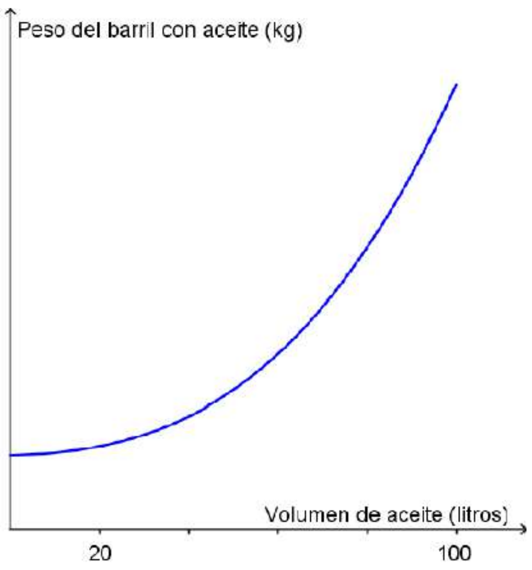
d) Decidí cuáles de estas fórmulas permiten calcular el peso del barril con aceite "P" en función de la cantidad de aceite "x"que contiene.

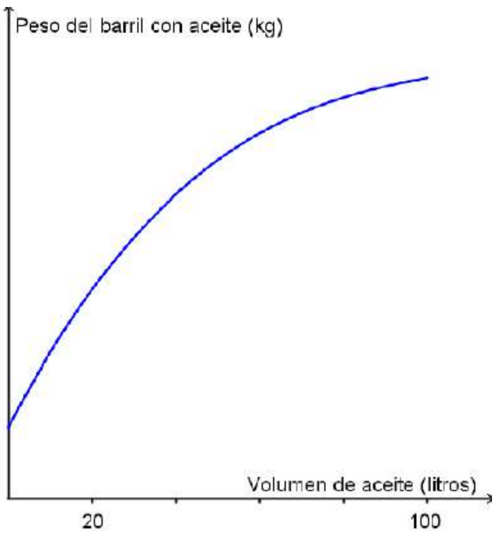
i. P = 30 – 0,6.x   ii. P = 0,6.(x – 15) + 39   iii. P = 0,6x   iv. P = 0,6x + 30

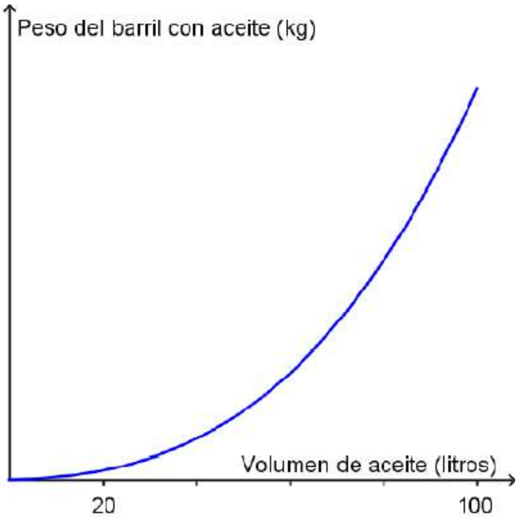
v. P = 36 + 0,6.(x – 10)

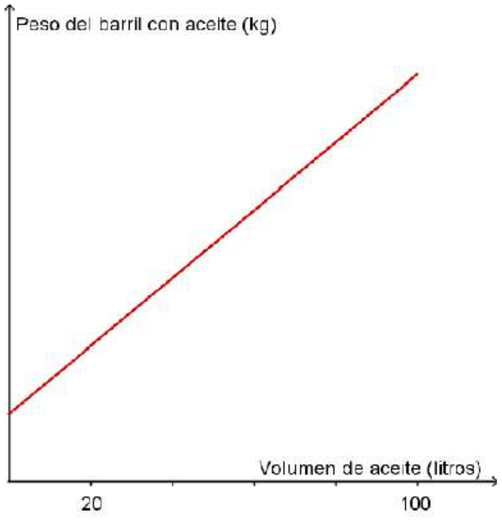
e) Analizá cuál o cuáles de los siguientes gráficos podrían representar el peso del barril a medida que aumenta la cantidad de litros de aceite que hay en el mismo. Justificá.


Peso del barril con aceite (kg)
Volumen de aceite (litros)
20
100


Peso del barril con aceite (kg)
Volumen de aceite (litros)
20
100


Peso del barril con aceite (kg)
Volumen de aceite (litros)
20
100


Peso del barril con aceite (kg)
Volumen de aceite (litros)
20
100


Peso del barril con aceite (kg)
Volumen de aceite (litros)
20
100

2) María encendió una vela y a los diez minutos de hacerlo se preguntó cuánto tiempo tardaría en consumirse completamente. Ella sabe que las velas se consumen en forma uniforme; midió la altura de la vela en varios momentos y lo registró en esta tabla.

Tiempo desde que María encendió la vela (en minutos)	10	18	34	42
Altura de la vela (en cm)	14	13,2	11,6	10,8

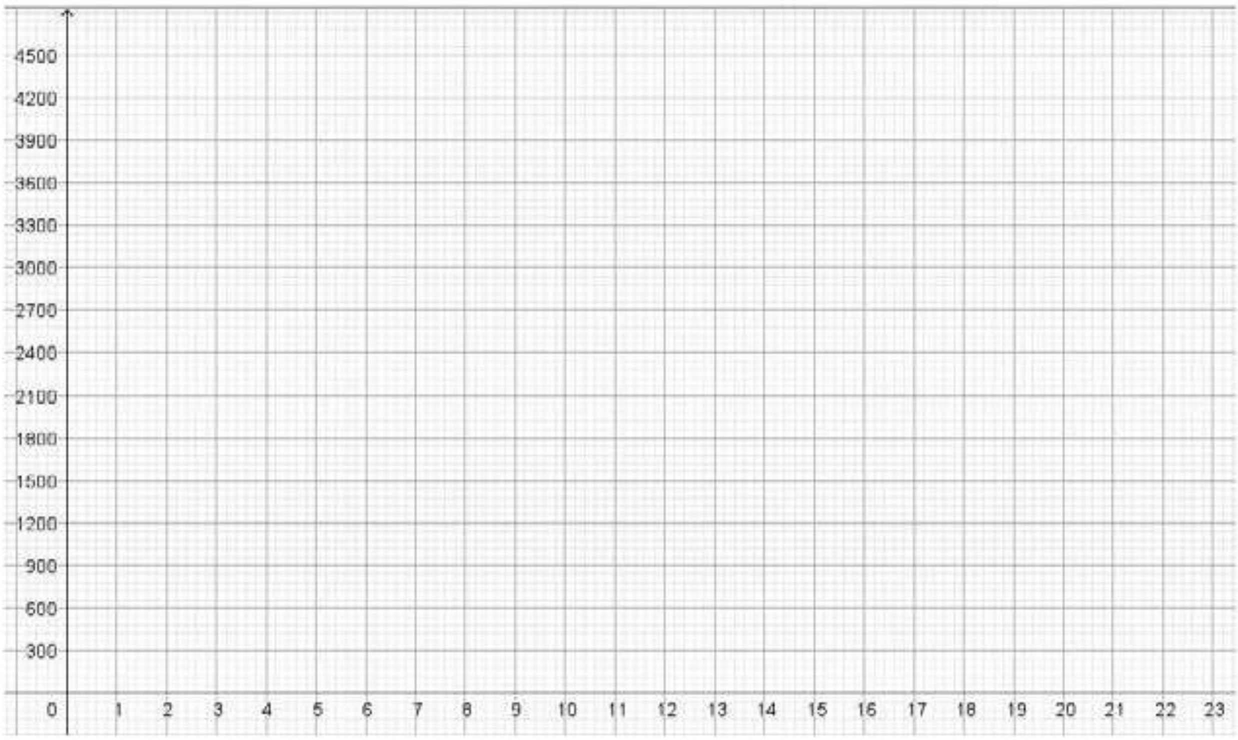
a) ¿Es cierto que a los 20 minutos la altura de la vela era de 13 cm?
b) ¿Cuál era la altura de la vela a los 30 minutos de haberla encendido?
c) ¿Se puede saber cuánto medía la vela en el momento en que María la encendió? ¿Y un minuto después?
d) ¿Cómo pudo hacer para saber en cuánto tiempo se iba a consumir la vela?
e) Calculá la altura de la vela a los 62,5 minutos. Escribí las cuentas que hacés.
f) Proponé una fórmula que permita calcular la altura ‘A’ de la vela (en cm) cuando pasaron ‘t’ minutos desde que María la encendió. Indicá el dominio e imagen.

3) Para vaciar el tanque de agua de un edificio se compró una bomba que permite hacerlo de manera uniforme en el tiempo. Para estudiar su funcionamiento, se tomaron las siguientes mediciones:

Tiempo de funcionamiento de la bomba (en minutos)	0		11,5	12	14,5	19,5	20,8
Cantidad de agua que hay en el tanque (en litros)		3300		2400	2025	1275	

a) Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y expliquen su respuesta:
   1. La bomba vacía 200 litros por minuto.
   2. La bomba vacía 150 litros por minuto.
   3. La bomba vacía 1.125 litros cada 7,5 minutos

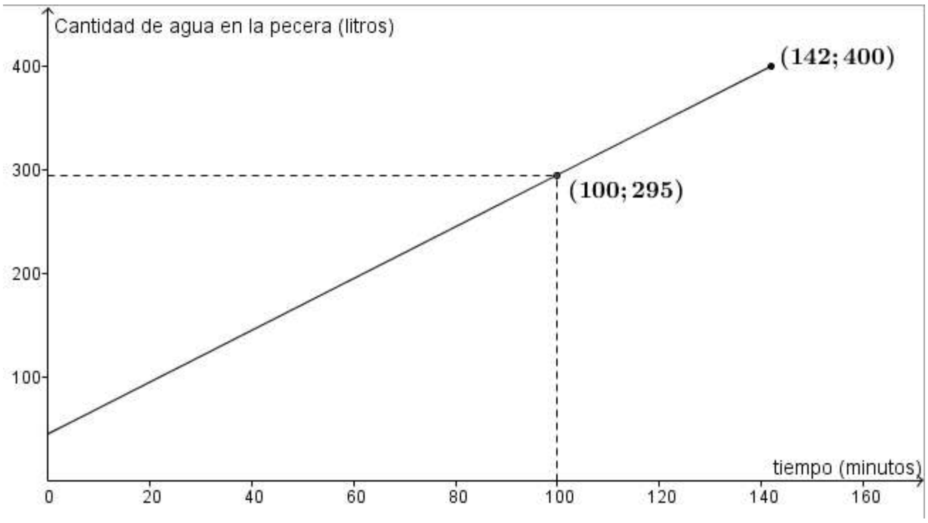
b) Completá la tabla con los valores faltantes.
c) Se define la función V(t) = cantidad de agua que hay en el tanque (en litros) luego de t minutos de funcionamiento de la bomba. Armá una fórmula para V(t).
d) En el siguiente sistema de ejes, ubicá los siguientes puntos:
(12; 2400) (13;2100) (10; 2700)



e) Analizá cada uno de los puntos que ubicaste en el ítem anterior. ¿Representan la cantidad de volumen de agua para el tiempo indicado? Si crees que sí, explicá por qué. Si crees que no, cambia solo una de las coordenadas para que el punto tenga tanto la información del tiempo como la del volumen de agua del tanque en ese tiempo.

f) A partir de la representación gráfica de la función V(t) y de la fórmula que armaste en la actividad anterior:
f_1) ¿En qué lugar del gráfico se puede leer el momento en que se encendió la bomba? ¿Cuánta agua hay en el tanque en ese momento? Explicá tu respuesta.
f_2) ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el volumen de agua que hay en el tanque al encender la bomba?
f_3) ¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque? ¿En qué lugar del gráfico se puede ver esta información?
f_4) ¿Cómo se puede obtener, usando la fórmula, el tiempo que tardó en vaciarse el tanque?
f_5) ¿Cuánto tarda la bomba en vaciar la mitad de la pileta? ¿Cómo lo podés ver en el gráfico?

4) Para llenar una pecera se utiliza una canilla que arroja agua de manera uniforme.
La pecera tiene una capacidad de 400 litros.
El gráfico muestra la cantidad de agua que tiene la pecera desde que se abre la canilla hasta que se llena la pecera.

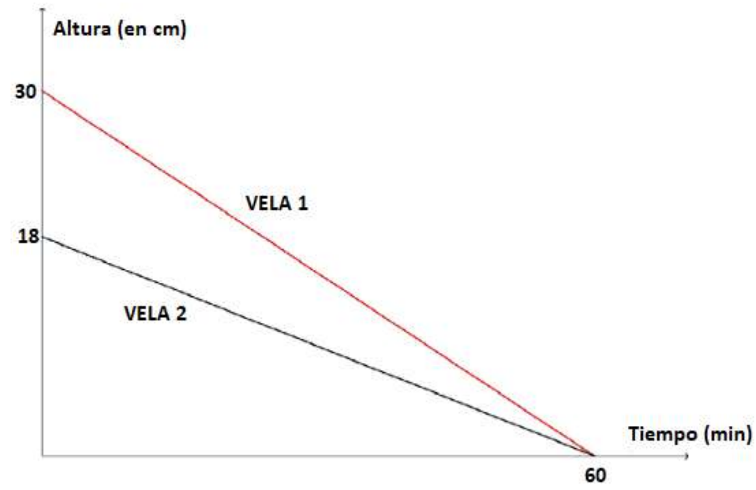


a) Completá la tabla de valores

Tiempo (en minutos)	**Cantidad de agua en la pecera (en litros)**
10	
30	
40	
55	
81	
100	295
	345
	400

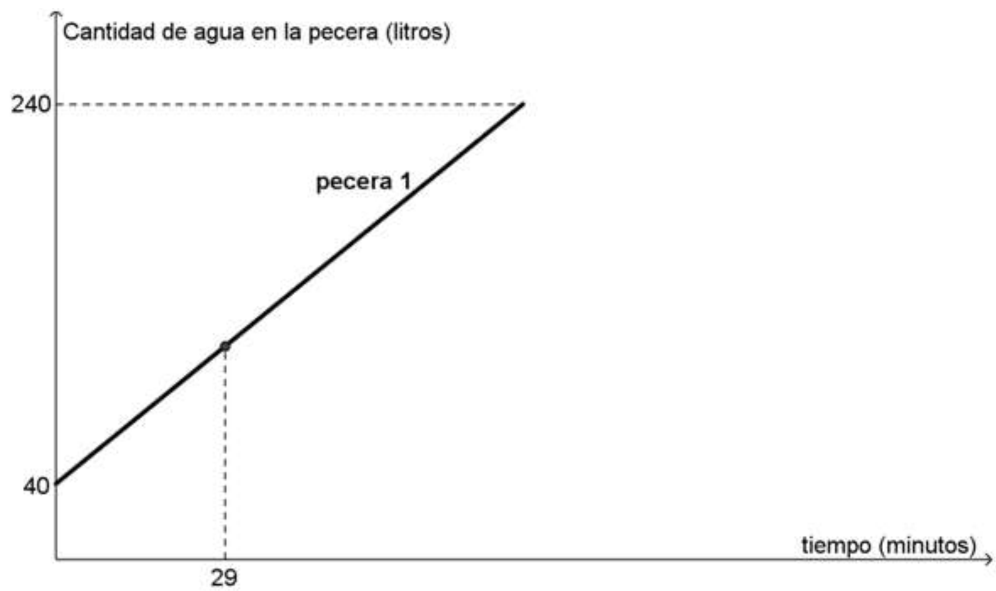
b) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que hay en la pecera en función del tiempo. Escribí el dominio y el conjunto imagen.
c) Graficá la cantidad de agua que le falta a la pecera para llenarse en función del tiempo, desde que se abre la canilla.
d) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que le falta a la pecera para llenarse en función del tiempo, desde que se abre la canilla. Escribí el dominio y la imagen.

5) El siguiente gráfico muestra la altura de dos velas cilíndricas de diferente diámetro que se encienden simultáneamente en función del tiempo.



a) ¿Qué datos podés extraer de los gráficos?
b) ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que la vela 1 tenga la altura inicial de la vela 2? Ubicá la respuesta en el gráfico.
c) Proponé, para cada vela, una fórmula que permita calcular la altura en función del tiempo. Escribí el dominio y el conjunto imagen.
d) ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que la vela 1 supere a la vela 2 en 8 cm? Ubicá la respuesta en el gráfico.

6) Dos canillas diferentes se abren juntas para llenar dos peceras idénticas. Cada canilla llena una pecera
La fórmula $C_2(t)= 1.5t + 69$ permite calcular la cantidad de agua “C_2” (en litros) que tiene la pecera 2 cuando pasaron “t” minutos desde que se abrió la canilla 2.
A los 29 minutos desde que se abren las canillas, las dos peceras tienen la misma cantidad de agua.



a) ¿Qué datos aporta el gráfico de la cantidad de agua de la pecera 1 en función del tiempo?
b) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pecera 1 a los 29 minutos de abrir la canilla? Ubicá la respuesta en el gráfico.

c) ¿Cuánto tardará en llenarse la pecera 1? Ubicar la respuesta en el gráfico.
d) Proponé una fórmula que permita calcular la cantidad de agua que hay en la pecera 1 en función del tiempo. Escriban el dominio.
e) Graficá en el mismo sistema de ejes cartesianos, la cantidad de agua que hay en la pecera 2 en función del tiempo.

7) Dos velas se encienden simultáneamente y se terminan de derretir en el mismo momento. Cada una de ellas se consume en forma uniforme.
La expresión $V_1(t) = 60 - 4{,}8.t$ permite calcular la altura "V_1" de la vela 1 en función del tiempo "t" (en minutos).
Cuando pasaron 10 minutos, la vela 2 tenía 3 cm menos que la vela 1.

a) Completá la tabla.

Tiempo (minutos)	Altura de la vela 1 (cm)	Altura de la vela 2 (cm)
0		
5		
10		
		0

b) Proponé una fórmula que permita calcular la altura de la vela 2 'V_2' en función del tiempo 't'. Indicá el dominio e imagen.
c) Graficá la altura de la vela 1 en función del tiempo.

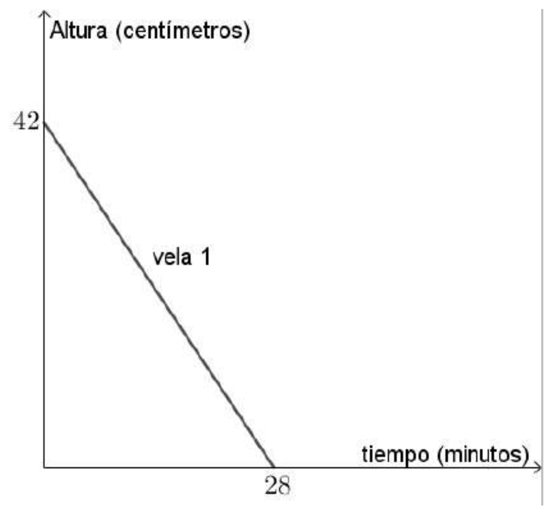
8) Se muestra un cuadro tarifario de dos empresas distribuidoras de energía eléctrica que cobran un cargo fijo y un valor por Kwh consumido.

Consumo (Kwh)	Empresa A Importe ($)	Empresa B Importe($)
82	260	
100		308
190	530	
240		630

a) Completar el cuadro tarifario.
b) ¿Qué empresa es más conveniente?

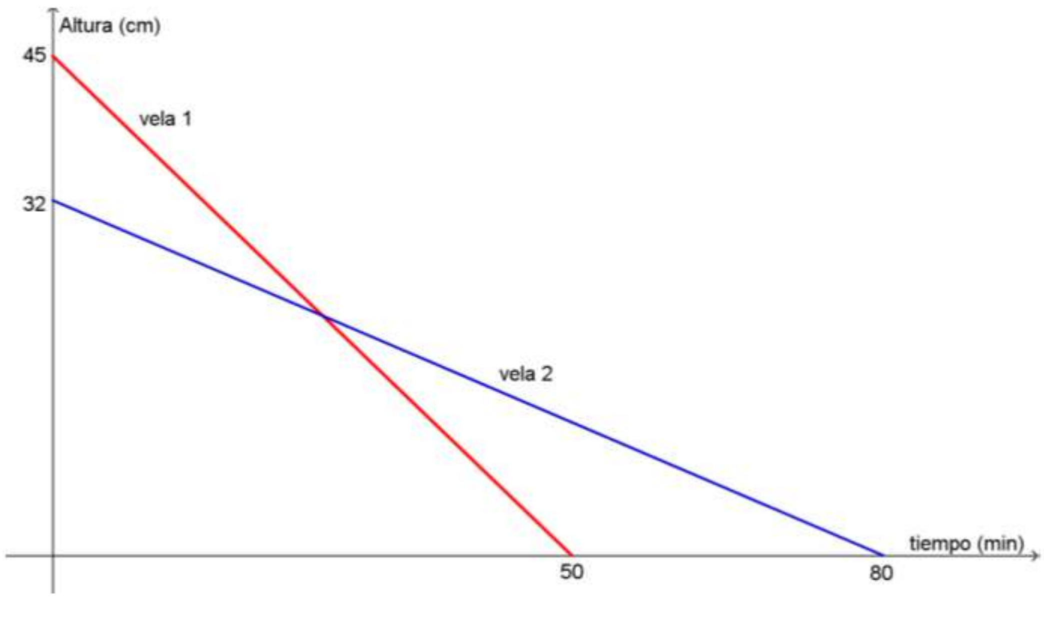
9) El gráfico representa la altura de la vela 1 en función del tiempo.

La vela 2 se enciende en el mismo momento que la vela 1 y se derrite de manera uniforme.
Una de las velas pierde 0,5 cm por minuto.
En el instante en que la vela 1 se derrite completamente, la vela 2 mide 10 cm.

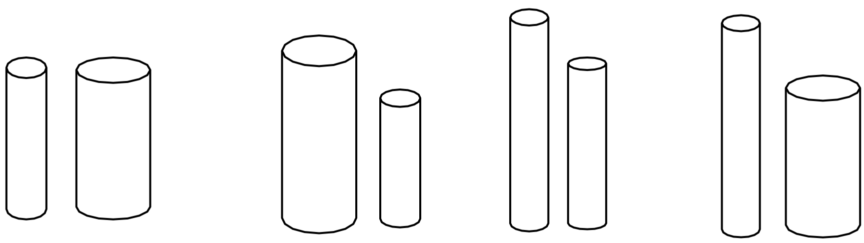


a) Calculá la altura inicial de la vela 2.
b) Calculá el tiempo que tarda la vela 2 en derretirse completamente.
c) Proponé una fórmula que permita calcular la altura de la vela 2 'A_2'en función del tiempo 't'. Escribí los conjuntos dominio e imagen de la función.
d) Analizá si la fórmula **$A_2(t) = 10 – 0,5.(t – 28)$** permite calcular la altura de la vela 2 en función del tiempo.
e) Graficá, en el mismo sistema de ejes cartesianos, la altura de la vela 2 en función del tiempo.
f) Calculá el tiempo que tiene que pasar, desde que se encienden las velas, hasta que ambas tienen la misma altura. ¿Qué altura tienen en ese instante?

10) El siguiente gráfico muestra la altura de dos velas cilíndricas en función del tiempo.



a) ¿Cuál de las siguientes imágenes representa el instante en que se encienden las velas?



1 2 3 4

b) ¿Qué altura tiene la vela 2 en el instante en que la vela 1 se derrite completamente?
c) ¿En qué momento las dos velas tienen la misma altura? ¿Qué altura tienen en ese instante?
d) ¿En algún momento, desde que se encienden las velas, tienen una diferencia de 5 cm de altura?
e) Confeccioná un gráfico para cada una de las imágenes descartadas en a), que muestre la altura de las dos velas en función del tiempo. Considerá que cada imagen representa el instante en que se encienden las velas.

11) Para vaciar dos tanques con agua de distinto tamaño, se encienden simultáneamente dos bombas diferentes.
Las bombas extraen el agua de cada tanque de manera uniforme.
Cuando se encienden las bombas, el agua del tanque 1 llega hasta los 208 cm de altura; y se termina de vaciar cuando pasaron 65 minutos.
El tanque 2 tarda 72 minutos en vaciarse.
Cuando pasaron 5 minutos, desde que se encendieron las bombas, la altura del agua del tanque 1 supera en 24,5 cm a la altura del agua del tanque 2.

a) Completá las tablas de valores

Tiempo (minutos)	**Altura de agua en el tanque 1 (centímetros)**
0	
1	
5	
	75,2
64	
	0

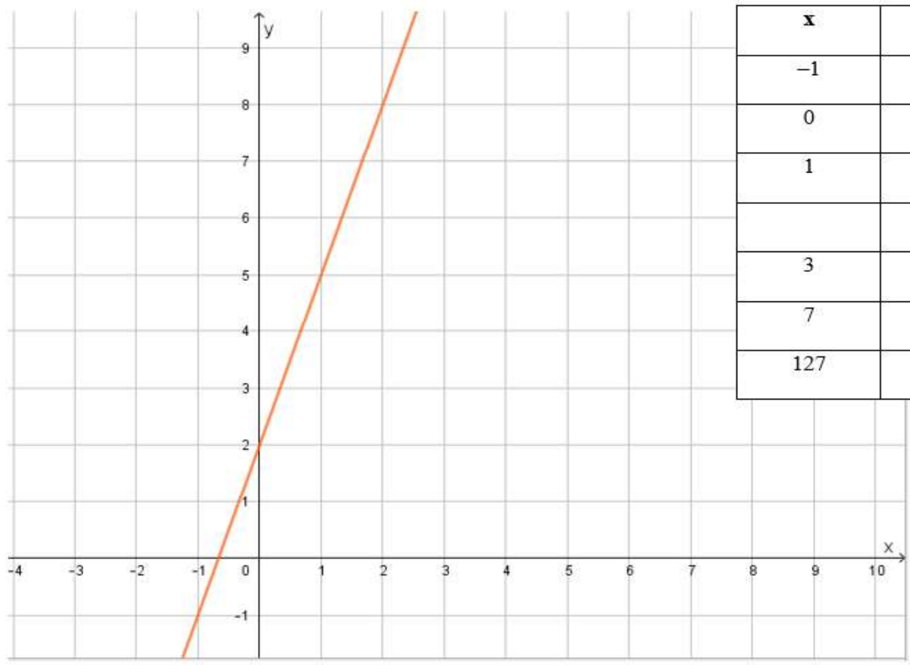
Tiempo (minutos)	**Altura de agua en el tanque 2 (centímetros)**
0	
1	
5	
	0

b) ¿En algún momento, desde que se encienden las bombas, el agua de los dos tanques llega a la misma altura? ¿A qué altura llega el agua en ese momento?
c) ¿En qué momentos, desde que se encienden las bombas, hay 10,5 cm de diferencia entre las alturas de agua de los tanques?
d) Graficá, en un mismo sistema de ejes cartesianos, la altura de agua en cada tanque en función del tiempo. (Colocá las respuestas de los ítems a y b)

Función lineal. Ecuación de la recta. Puntos de intersección. Rectas paralelas y perpendiculares.

12) Completá, en cada caso, la tabla de valores con la información que muestra el gráfico.

a_1)

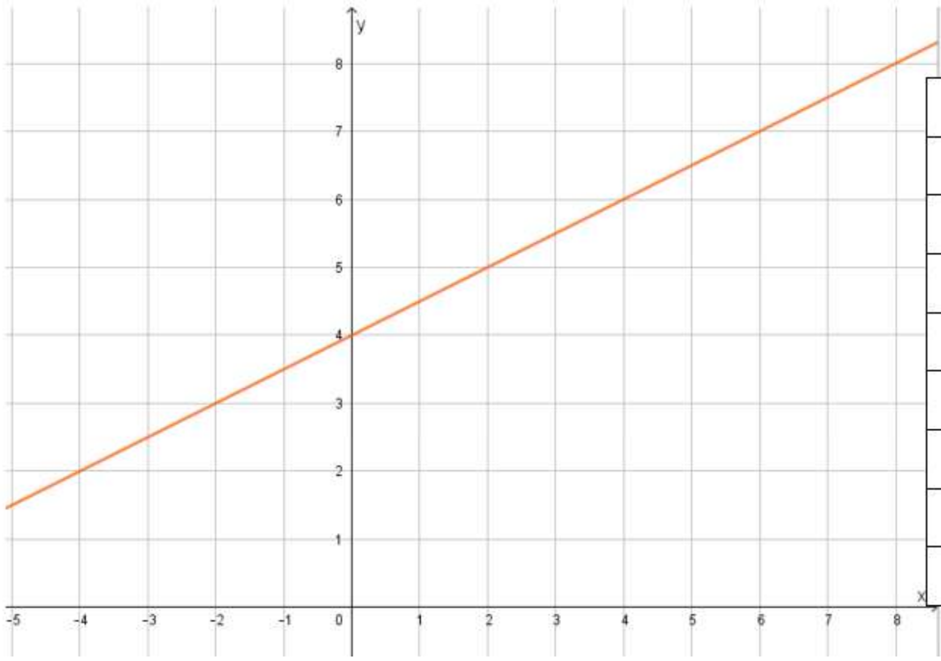


x	y
−1	−1
0	2
1	
	8
3	
7	
127	

a_2) Analicen si alguna/s de las siguientes fórmulas permite completar la tabla del ítem anterior.

y = 5x + 2 $\quad y = \frac{1}{3}x + 2 \quad$ y = 3x $\quad$ y = 3x + 2 $\quad y = 3(x-1) + 5 \quad y = 3(x-3) + 11$

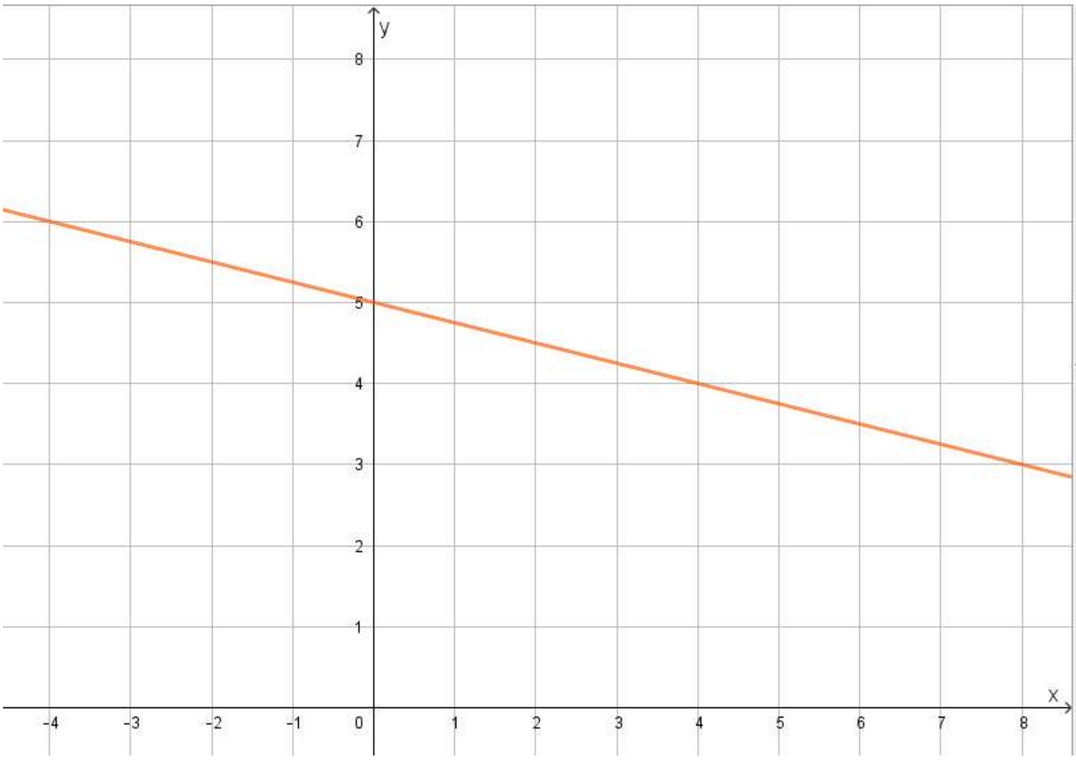
b)



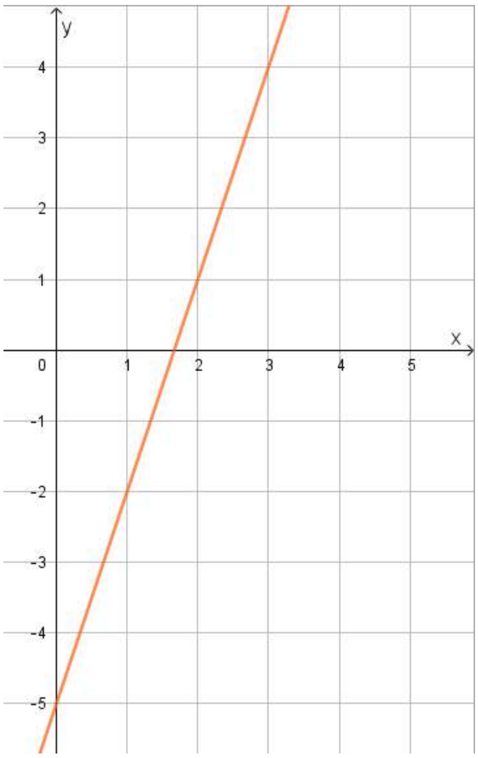
x	y
-4	
-2	
	4
0,5	
2	
4	
120	
	65,7

13) En cada caso, completá las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta y proponé una fórmula para la recta.

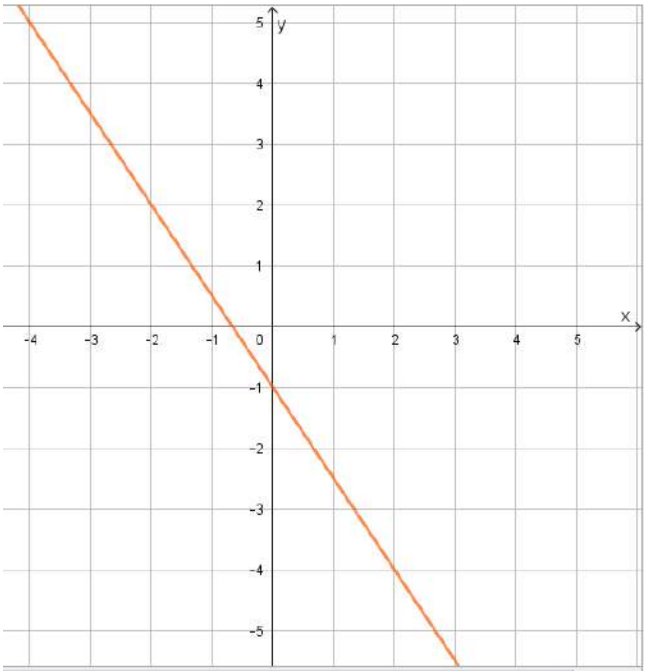
a) (–4; 6)   (0;   )   (4 ;   )   (;3)   (3;   )   (120;   )   (;0)



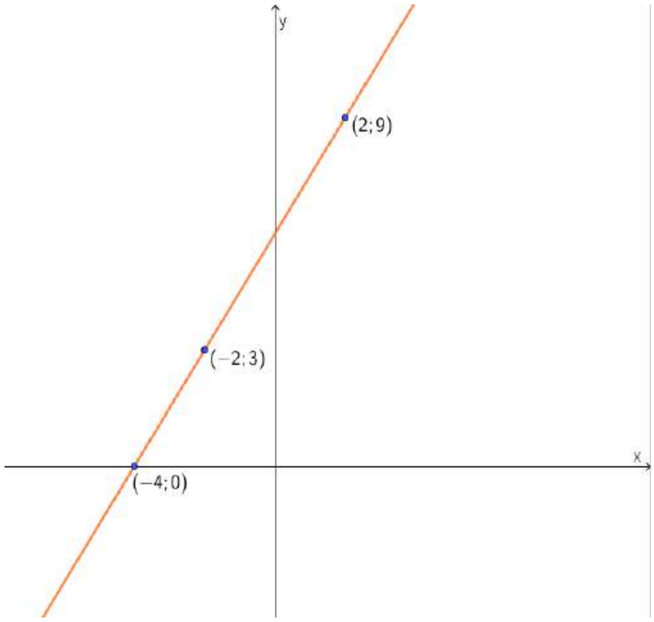
b) (0;   )   (1;   )   (2 ;   )   (3 ;   )   (120;   )   (; 0)   (; 42)



c) $(-2;\quad)$ $(\quad;-1)$ $(2\,;\quad)$ $(1\,;\quad)$ $(12;\quad)$ $(\quad;0)$ $(-10\,;\quad)$

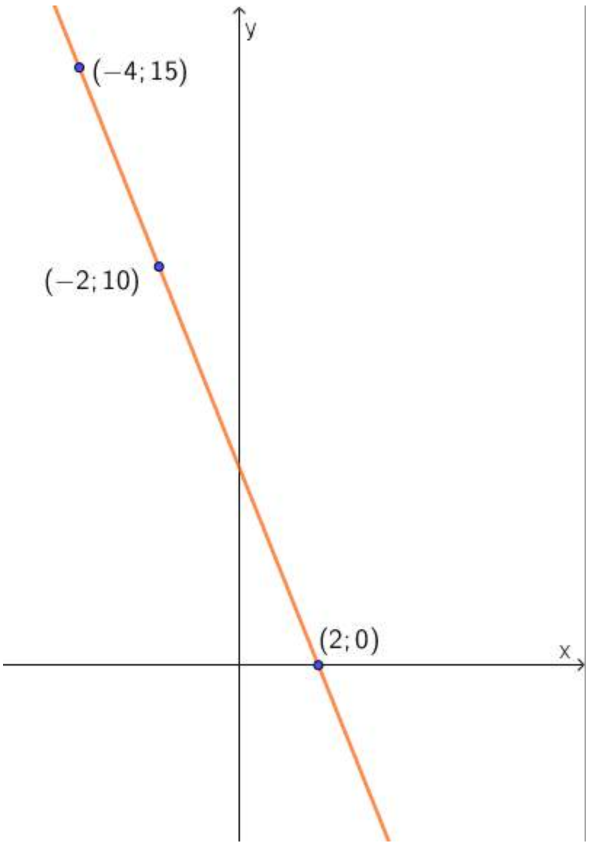


d) $(1;\quad)$ $(3\,;\quad)$ $(-5;\quad)$ $(34;\quad)$ $(-24\,;\quad)$



e)

$(0;\quad)$ $(3\,;\quad)$ $(14;\quad)$ $(\quad;-25)$



14) La PENDIENTE de una recta:

A la variación de la variable dependiente ‘y’ cuando la variable independiente ‘x‘ aumenta 1 unidad, la llamaremos ***pendiente***.

La pendiente de una recta puede ser positiva o negativa.

La ORDENADA AL ORIGEN de una recta: Es el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero.

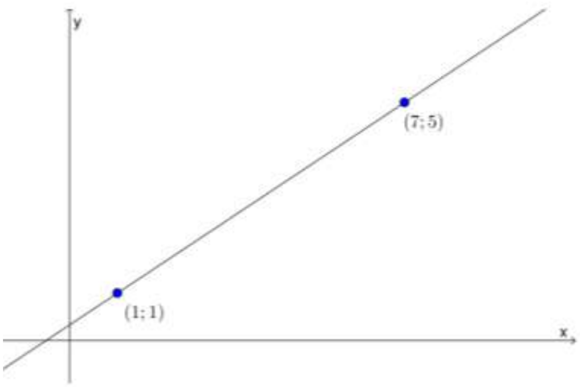
La RAÍZ de una recta: Es el valor que toma la variable independiente cuando la variable dependiente vale cero.

Vuelvan a los problemas anteriores para completar el siguiente cuadro:

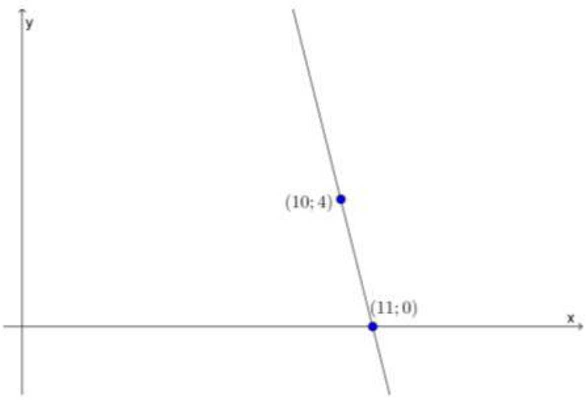
Problema		Variable independiente	Variable dependiente	Pendiente de la recta	Significado de la pendiente en el contexto del problema	Ordenada al origen	Significado de la ordenada al origen en el problema	Raíz de la recta	Significado de la raíz en el contexto del problema	Fórmula
Problema del barril (ejercicio 1)		Cantidad de aceite en el barril (litros)	Peso del barril con aceite (Kg)	0,6	El peso que marca la balanza aumenta 0,6 Kg por cada litro de aceite que se agrega al barril.			No tiene	————————	P = 0,6.x +30
Problema de las velas (ejercicio 9)	Vela 1					45		50		
	Vela 2			–0,4						
Problema 12 a		x	y	3	Cuando ‘x’ aumenta una unidad, ‘y’ aumenta 3 unidades.					
Problema 13 a		x	y			5	El valor que toma ‘y’, en este caso y=5, cuando x = 0			

15) Determinar el valor de la pendiente y la ordenada al origen de cada recta.

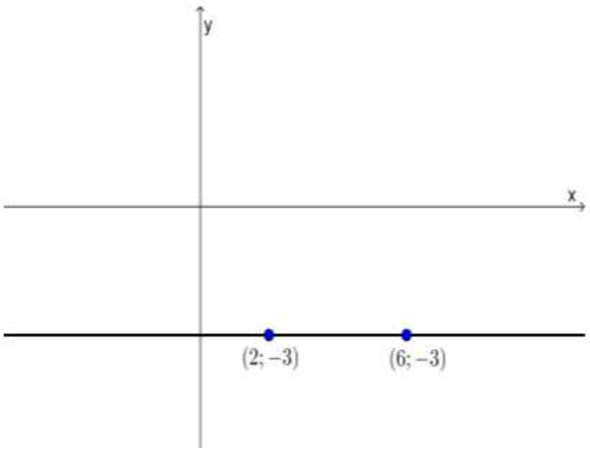
a)



b)



c)



16) Decidí si alguno/s de los gráficos corresponde a la función lineal dada por la fórmula ***f(x) = 6 + 3x***. Justificá tu respuesta.

GRÁFICO 1

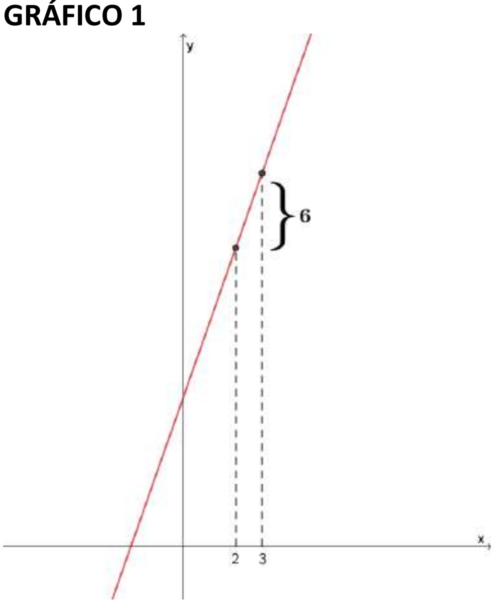


GRÁFICO 2

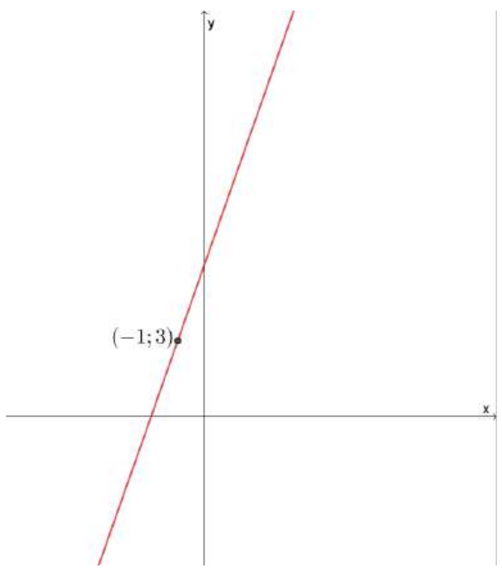


GRÁFICO 3

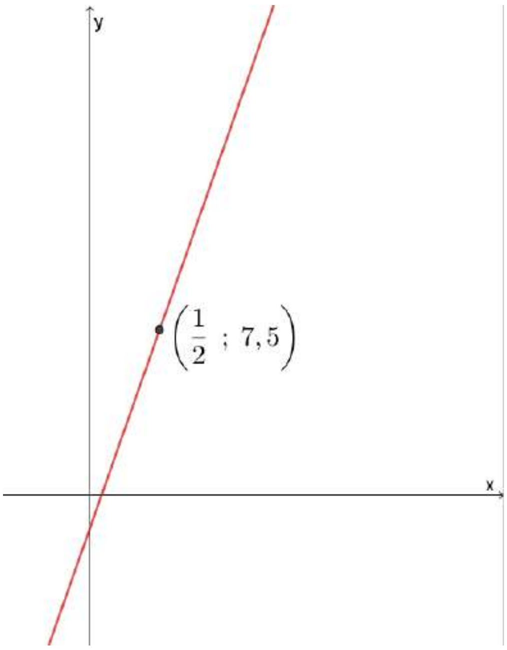


GRÁFICO 4

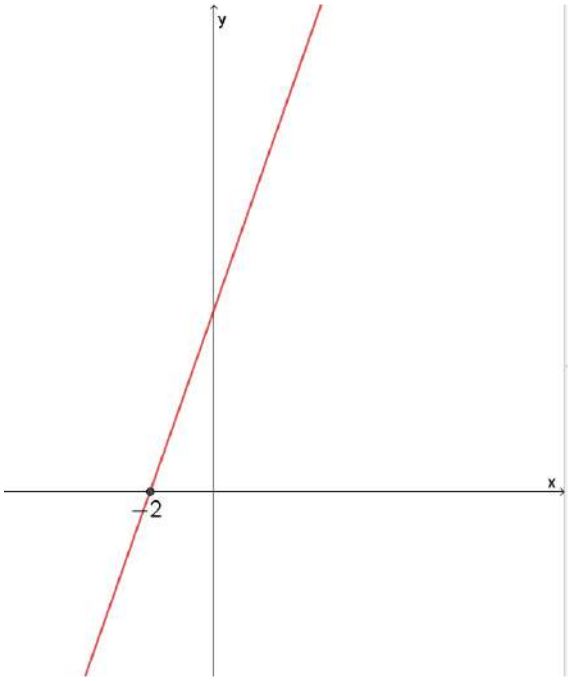


GRÁFICO 5

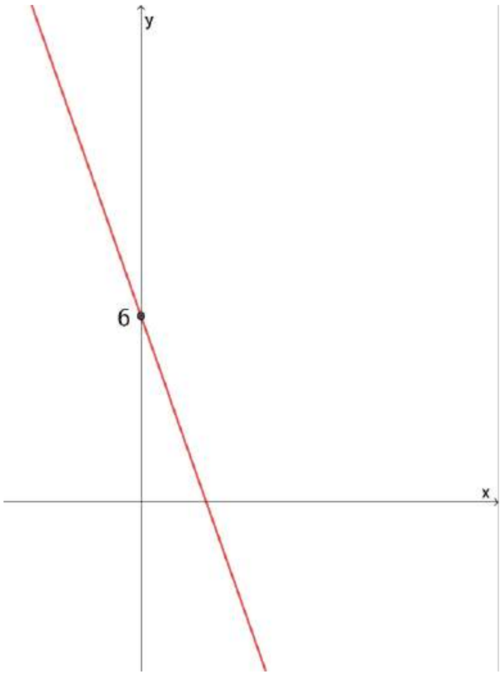
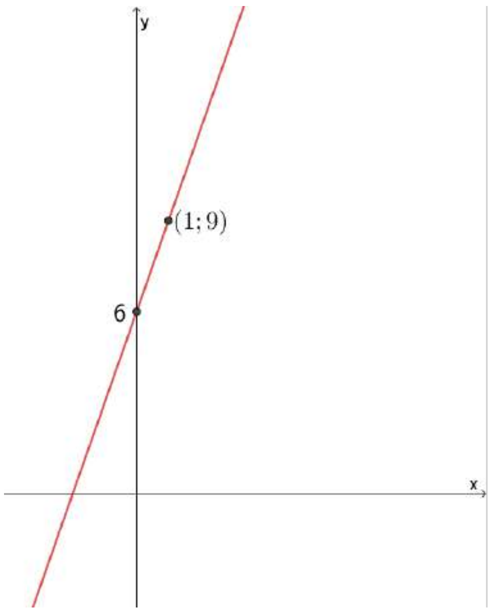


GRÁFICO 6



17) Para cada una de las siguientes fórmulas, decidí qué gráfico le corresponde. Justificá en cada caso.

$f(x) = 2x - 10$ $\quad g(x) = -2x - 13$ $\quad h(x) = 2 + 3x$ $\quad i(x) = -x - 4$ $\quad j(x) = 3x - 10$
$m(x) = -2(x - 5)$

Luego indicá, en cada caso, la raíz, la pendiente y la ordenada al origen de cada una.

Gráfico 1

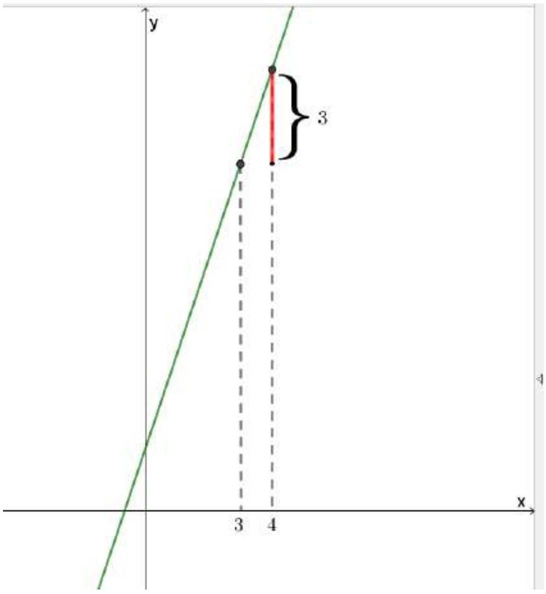


Gráfico 2

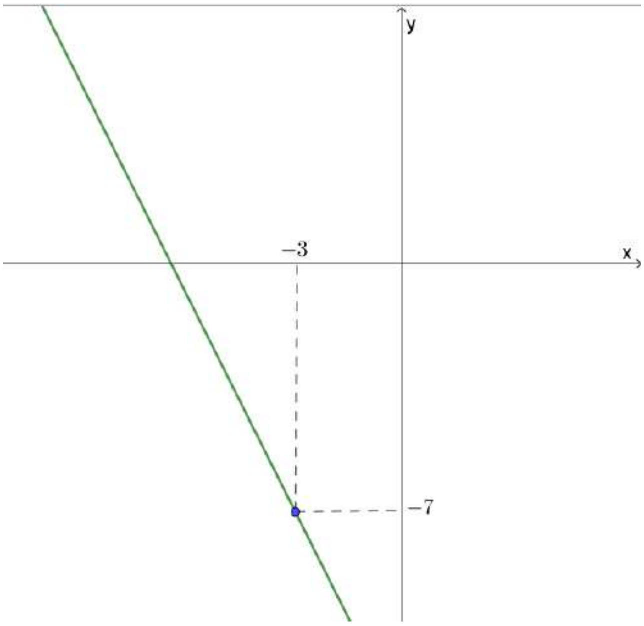


Gráfico 3

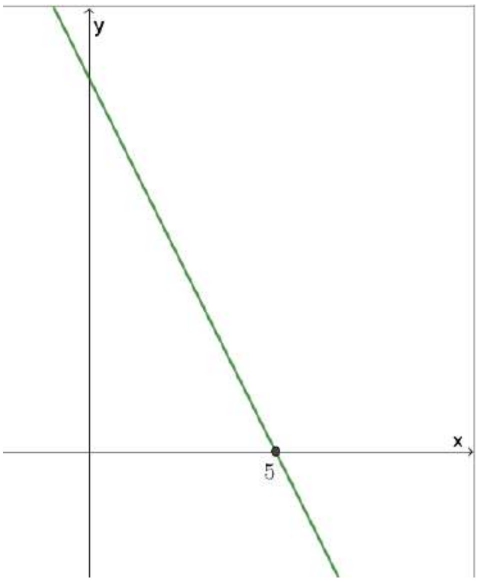


Gráfico 4

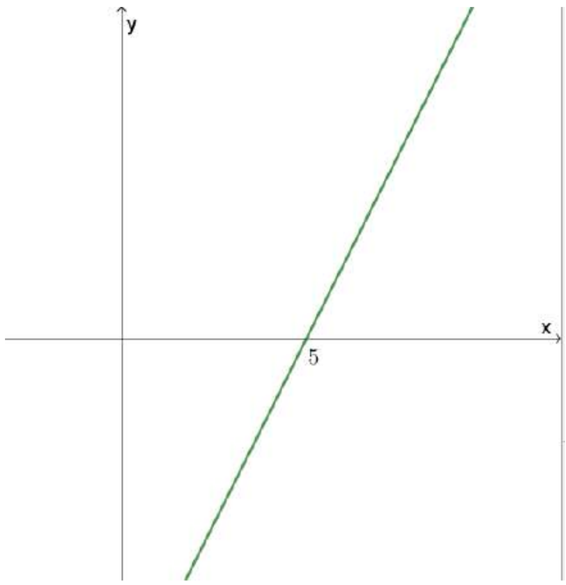


Gráfico 5

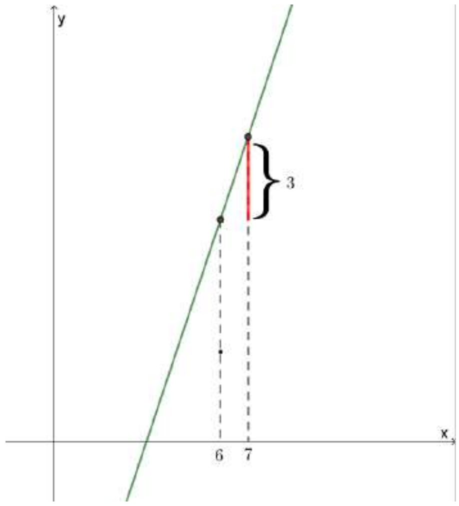
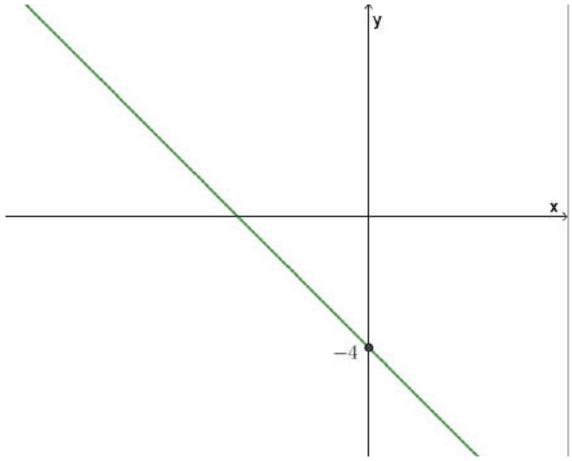


Gráfico 6



18) Graficá las siguientes funciones lineales dadas por su fórmula:

$f(x) = 5x - 2$ $\qquad g(x) = -x + 3$ $\qquad h(x) = -4(x - 3)$ $\qquad j(x) = \frac{1}{2}(x + 6)$

En cada caso, describí los pasos que utilizaste para la construcción del gráfico e indicá la pendiente de la recta, la ordenada al origen y la raíz.

19) Dados los puntos: A = (1 ; –2,5), B = (3,5 ; 1,2) y C = (3 ; 0,5) , se pide:

a) Decidí si los tres puntos están alineados. (Aclaración: tres puntos están alineados si están en la misma recta)

b) Modificá la ordenada del punto B para que los tres puntos del ejercicio anterior estén alineados.
(Aclaración: Se denomina **ordenada de un punto** a la coordenada ´y´, por ejemplo la ordenada del punto (1;**4**) es 4)

c) Hallá la raíz de la recta que pasa por A y C.

20) Dados los puntos A = (3 ; 1) B = (6; –5,5) C = (7; –7), se pide:

a) Decidí si los tres puntos están alineados. Si no lo están modificá una de las coordenadas del punto B para que los tres puntos queden alineados.

b) ¿Qué punto de la recta r: y = 3x –1/2 está alineado con los puntos A y C?
Utilicen GeoGebra para verificar la respuesta.

21) Hallá el punto de la recta r: y = 5x – 1 que está alineado con los puntos (0;3) y (2; –3).

22) Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tus respuestas.

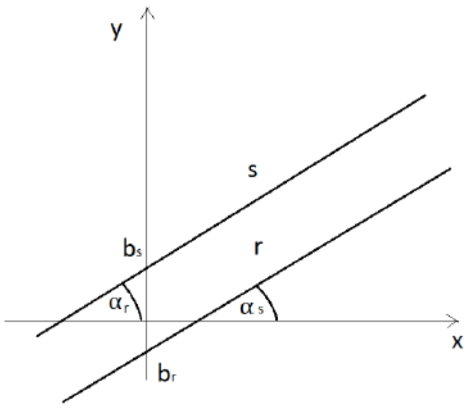
a) Si una función lineal es creciente, su pendiente es un número negativo.
b) Si una función lineal J cumple que J(7) = 8 y J(9)=11, su pendiente es 3.
c) Si la pendiente de la recta es 4 y la ordenada al origen de la recta es 10, la raíz de la recta es x=–2,5.
d) La raíz del gráfico de la función lineal que pasa por (0;2) y (2; –4) es 2/3.
e) La recta que pasa por (3;2) y tiene pendiente 2, pasa por el punto (55;106)
f) La ordenada al origen la función lineal que pasa por (–2;0) y (2;16) es 8.
h) Las fórmulas y = –3(x – 4) + 1 e y = –3x + 13 tienen el mismo gráfico.

23) Decidí, en cada caso, si las rectas son paralelas:

a) el gráfico de f(x) = 3x+1 y la recta que pasa por los puntos (0;20) y (12;55)

b) la recta que pasa por (50;252) y (150;152), y la recta que pasa por los puntos (0;55) y (100; –55)

***Propiedad**: Dos rectas son paralelas, sí y solo sí, tienen la misma pendiente.*



$r \to y = m_r x + b_r$

$s \to y = m_s x + b_s$

$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow tg\alpha_r = tg\alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$

(por ser $0^o \le |\alpha_r| < 180^o \wedge 0^o \le |\alpha_s| < 180^o$)

24) Escribí, si es posible, la fórmula de una recta que cumpla lo pedido. Graficá.

a) Es paralela a la recta de ecuación y = 3x+5 y pasa por el punto (5; –1)

b) Es paralela a la recta que pasa por (2;4) y (3;10), y corta al eje X en 4.

25) La recta **w** pasa por el punto (0;6) e interseca a las rectas paralelas **m** y **r: y = 3x + 2** en los puntos R y P respectivamente.
La recta **m** corta al eje X en el punto R y pasa por el punto (0; –9).

a) Colocá en un gráfico la información del enunciado.

b) Hallá las coordenadas del punto P.

26) Lean la siguiente propiedad y analicen su demostración.

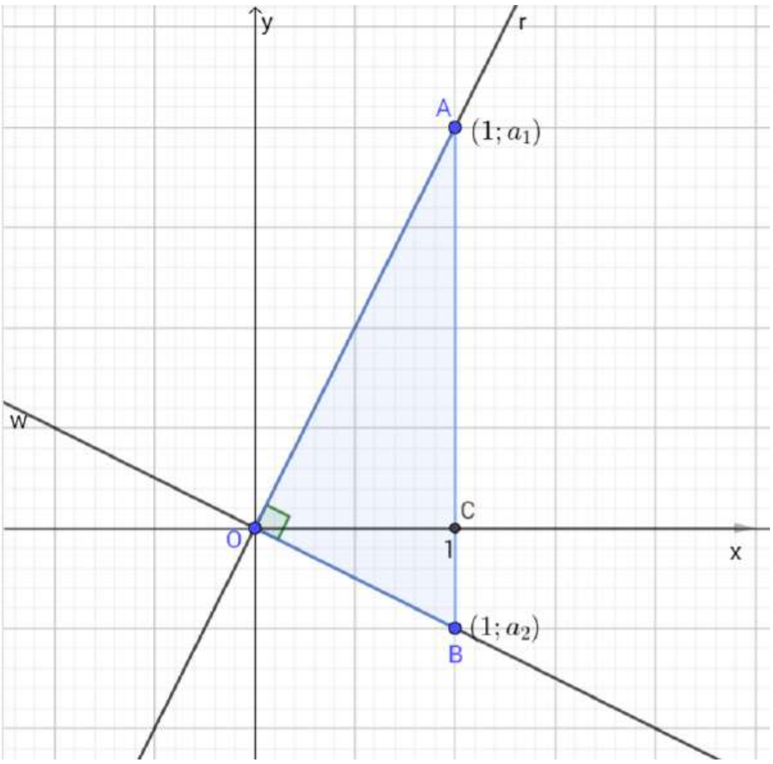
***Propiedad**: Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes da –1.*

Consideremos las rectas perpendiculares **r** y **w** que pasan por el origen de coordenadas (0;0) para hacer más sencilla la demostración. Queremos probar que el producto de sus pendientes es –1.

$r:$ $y = a_1.x$ la recta r es creciente, $a_1 > 0$.

$w:$ $y = a_2.x$ la recta w es decreciente, $a_2 < 0$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras en los triángulos $O\overset{\Delta}{A}C$, $O\overset{\Delta}{C}B$ y $O\overset{\Delta}{A}B$:



$\overline{OA}^2 = 1^2 + a_1^2$ (1) , $\overline{OB}^2 = 1^2 + (-a_2)^2$ (2) y $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ (3).

Reemplazando las igualdades (1) y (2) en (3):

$\overline{AB}^2 = 1^2 + a_1^2 + 1^2 + (-a_2)^2 = 2 + a_1^2 + a_2^2$ (4)

$\overline{AB} = a_1 + (-a_2) = a_1 - a_2$

$\overline{AB}^2 = (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 - 2.a_1.a_2 + a_2^2$ (5)

Igualando (4) y (5) nos queda:

$2 + a_1^2 + a_2^2 = a_1^2 - 2.a_1.a_2 + a_2^2$ que es equivalente a $2 = -2.a_1.a_2$, luego

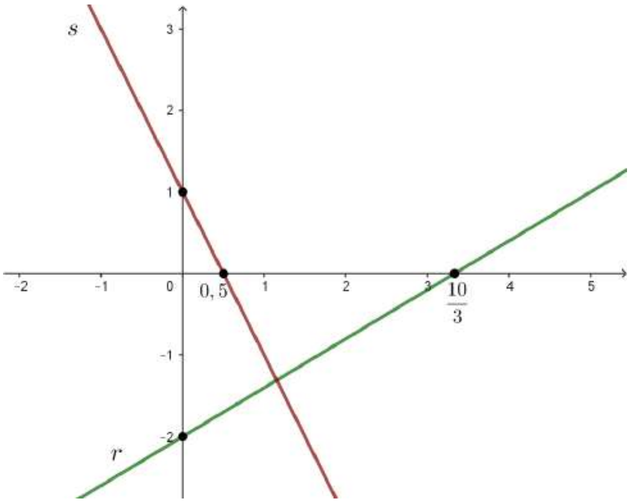
$\boxed{a_1.a_2 = -1}$

Para pensar: Intentá explicar que la propiedad se cumple, aunque las rectas perpendiculares no pasen por el origen de coordenadas.

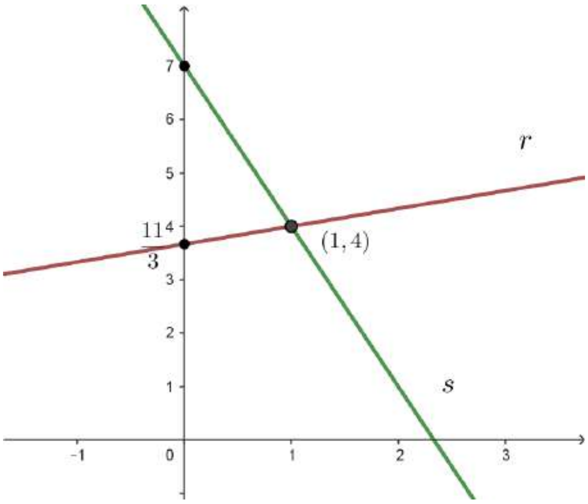
También se puede probar que ***si el producto de las pendientes de dos rectas da –1, las rectas son perpendiculares. (propiedad recíproca)***

27) En cada caso, indicá si las rectas graficadas son perpendiculares. Explicá tus respuestas

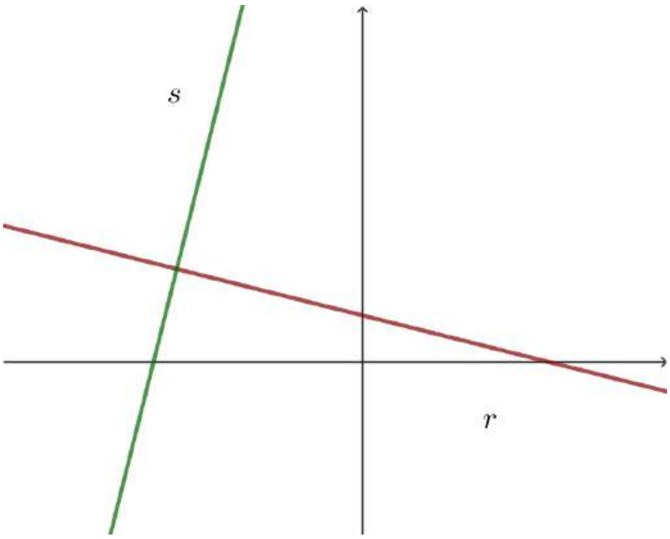
a



b



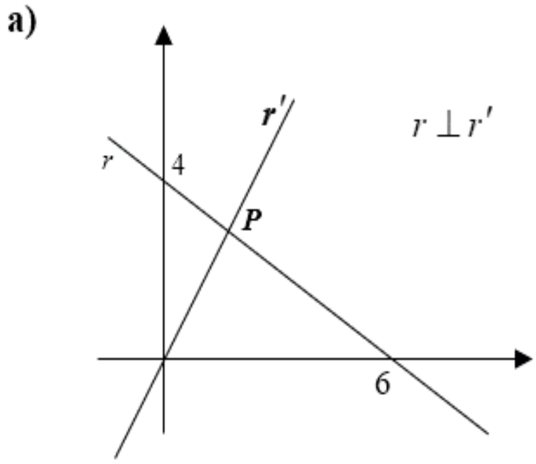
c

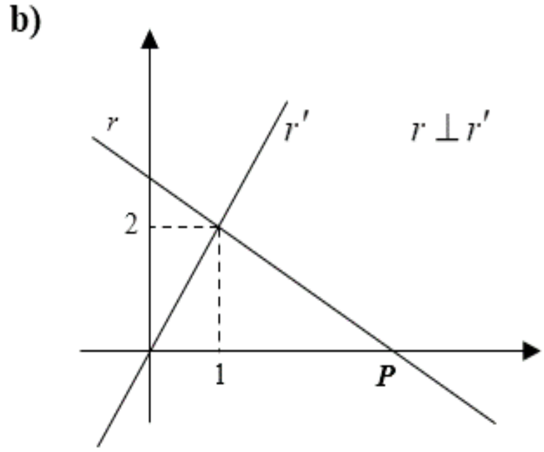


28) Proponé las fórmulas de dos rectas perpendiculares a la recta r : y = 2x + 6. Graficá las tres rectas.

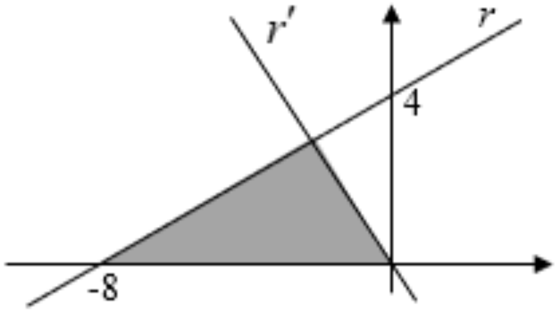
29) Hallá la fórmula de la recta que pasa por el punto (3;8) y es perpendicular a r: y = –x + 6. Grafiquen las dos rectas.

30) En cada caso, encuentren las coordenadas del punto P.

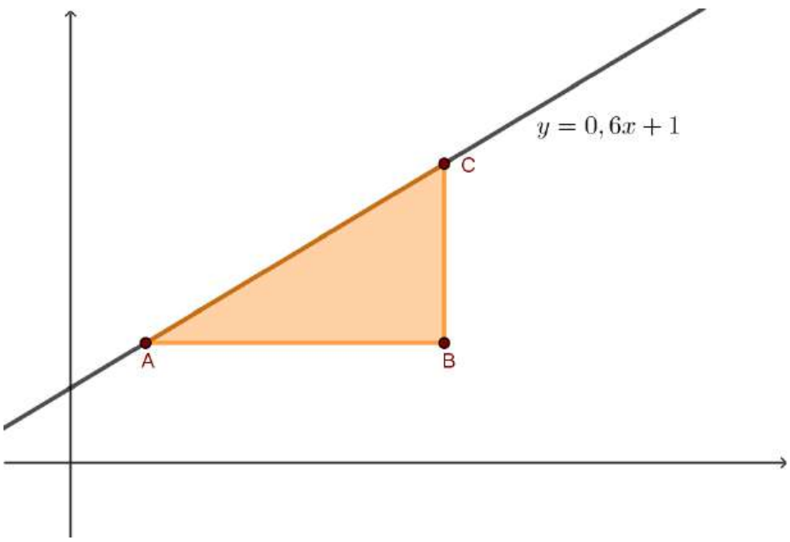




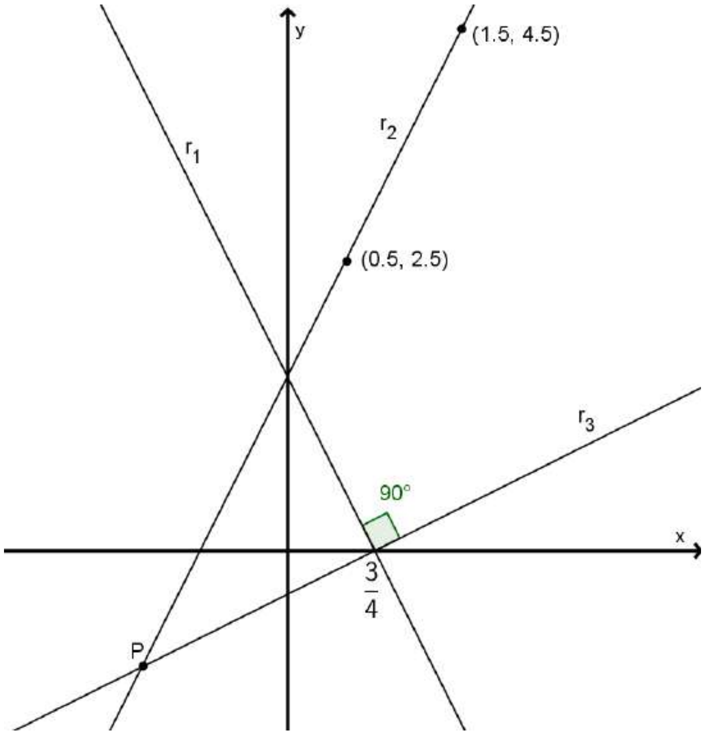
31) Hallá las ecuaciones de las rectas perpendiculares ***r** y **r'*** y el área del triángulo sombreado.



32) En la figura, la ecuación de la recta es $y = 0{,}6x + 1$. El área del triángulo ABC es $4{,}8\ cm^2$. Determiná las longitudes de sus lados.

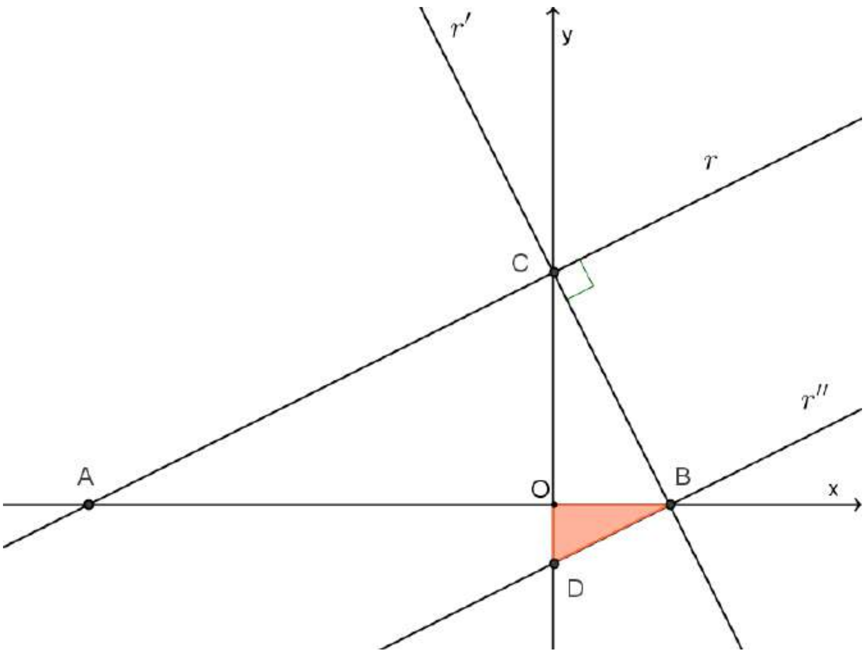


33) Determiná las ecuaciones de las rectas r_1, r_2 y r_3. Luego hallar las coordenadas del punto P.



34) La fórmula de unas de las rectas que se muestran tiene ecuación $y = \frac{1}{2}x + 2$, $r' \perp r$ y $r \,//\, r''$.

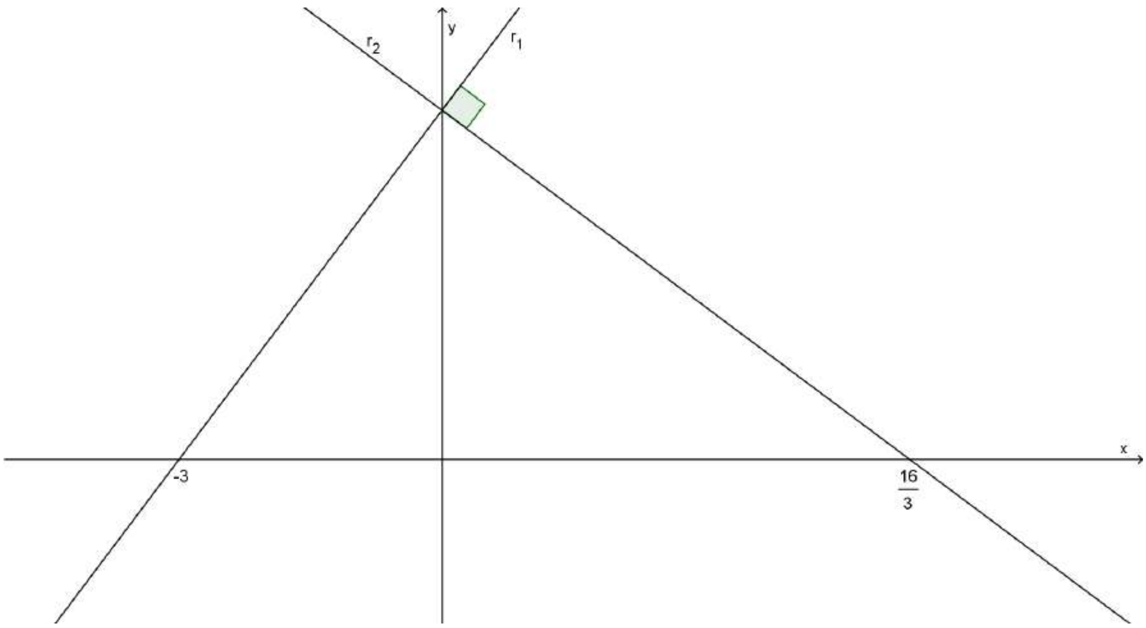
Determiná el área del triángulo $\overset{\Delta}{OBD}$.



35) Determiná las coordenadas del punto de la recta r: $y = -2x + 12,5$, que se encuentra más cerca del punto (0;0).

36) Determiná las coordenadas del punto de la recta r: y = 3x+8, que se encuentra más cerca del punto (3;5).

37) Hallá las ecuaciones de las rectas perpendiculares r_1 y r_2 que se cortan sobre el eje de las ordenadas.



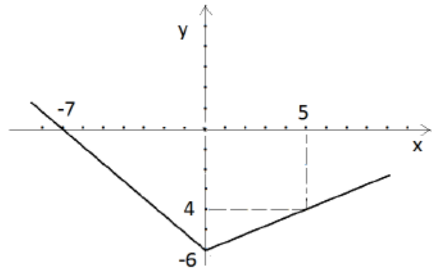
Funciones lineales por tramos

38) Sea $f: R \to R / f(x) = \begin{cases} 4 & si\ \ x < 3 \\ \frac{3}{2}x + 4 & si\ \ x \geq 3 \end{cases}$. Graficá, definí I_f y hallá el conjunto de ceros.

39) Sea $f: A \to R / f(x) = \begin{cases} -x - 2 & si\ \ 2 < x < 5 \\ -4 & si\ \ x < 2 \end{cases}$.

Graficá, definí I_f y hallá el conjunto de ceros.

40) Sea $f: R \rightarrow R / f(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$



a) Completá teniendo en cuenta el gráfico.
b) Hallá el conjunto de ceros.

Función módulo

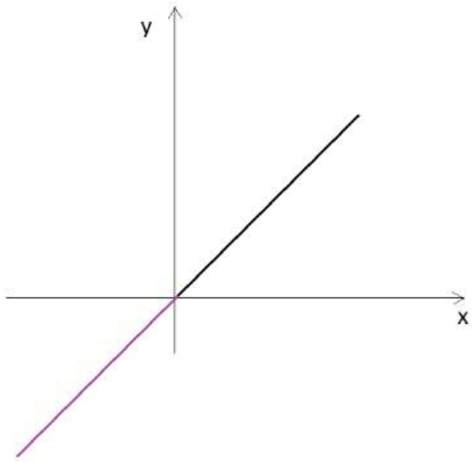
Sea $f: R \rightarrow R / f(x) = |x|$
Por definición de módulo de un número real podemos escribir:

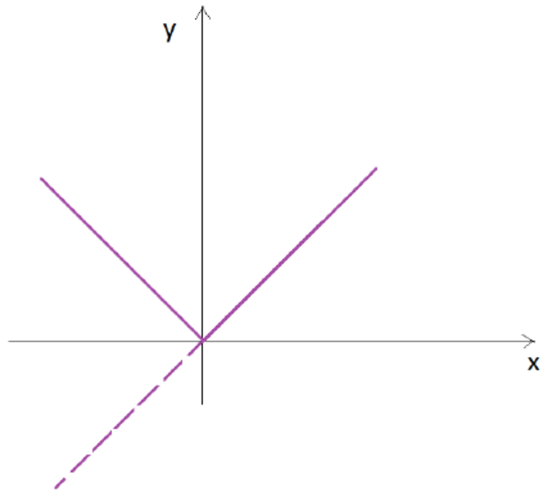
$$f: R \rightarrow R / f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

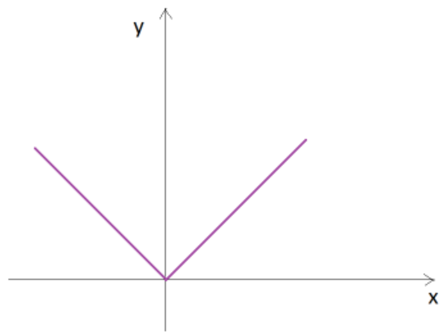
41) Determiná el conjunto imagen y analizá la paridad de la función anterior.

Nota: es interesante observar qué sucede con el gráfico de una función cuando le aplicamos el módulo.

Representamos y=x e $y = |x|$
La semirrecta que está incluida en el semiplano inferior en la representación de y=x pasa a ocupar el semiplano superior en la representación de $y = |x|$. Son simétricas respecto del eje x.







42) Representá en un mismo gráfico y=x+1 e $y = |x|$ definidas de $R \to R$ sin utilizar tabla de valores para la segunda.

43) Graficá las siguientes funciones: $f: R \to R/$

a) f(x)=3–$|x|$ b) f(x)=1+$|x-1|$

44) A partir del gráfico de $f: R \to R/f(x) = |x|$ representá:

a) g(x) = f(x+2) b)s(x) = f(x–2) c) h(x) = f(x)+1 d) t(x) = –f(x)

Unidad 2: Función cuadrática.

PRIMERA PARTE

1) Miguel y Ernesto se asociaron para desarrollar un micro emprendimiento como técnicos de computadoras.

Para decidir qué precio cobrarán por hora consultaron a un amigo economista. Teniendo en cuenta los costos fijos y la relación entre el precio que cobrarían por hora y la cantidad de trabajo que tendrían, el amigo les presenta la siguiente fórmula:

$$G(p) = 22050 — 2(p— 250)^2$$

La misma permite calcular la ganancia semanal "G" en función del precio por hora "p".

a) Miguel propone cobrar \$175 por hora ¿cuánto ganarían en ese caso?

b) Ernesto quiere aumentar la ganancia semanal ¿a qué precio podrían cobrar la hora?

c) ¿Cuál es la máxima ganancia semanal que se puede obtener? ¿Qué precio/s por hora hay que cobrar para obtener esa ganancia?

d) ¿Habrá otro valor de precio por hora con el cual se pueda obtener una ganancia semanal de \$10800?

e) Propongan diferentes precios por hora que pueden cobrar para obtener la misma ganancia.

2) Los registros de temperatura tomados un día del mes de julio entre las 0hs y las 15hs en una zona rural se ajustan a la función: $\boldsymbol{T(x) = 0,1(x-8)^2 - 4}$, donde 'T' es la temperatura en grados Celsius y 'x' la hora del día.

- *a)* ¿Qué temperatura hubo a las 2 de la mañana?
- *b)* ¿En algún momento de la mañana se registró la misma temperatura que a las 15 hs?
- *c)* ¿En algún momento del día se registró la misma temperatura que a las 0 horas?
- *d)* Propongan momentos del día donde se haya registrado la misma temperatura.
- *e)* ¿Es posible haber registrado antes de las 15 horas una temperatura de □1,5°C? ¿y de □5°C?
- *f)* ¿Cuál fue la temperatura mínima entre las 0 y las 15 horas y a qué hora se registró?

3) Dada la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = (x-2)^2 + 4}$

Busquen, si existen, otros valores de dominio que tengan la misma imagen que x = 5. ¿Cuántos hay?

- *a)* Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que x = 3. ¿Cuántos hay?
- *b)* Busquen, si existen, otros valores del dominio que tengan la misma imagen que x = 2. ¿Cuántos hay?
- *c)* Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 20. ¿Cuántos hay?
- *d)* Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 3. ¿Cuántos hay?
- *e)* Propongan, si existen, valores del dominio cuya imagen sea 4. ¿Cuántos hay?

f) Confeccionen una tabla con las respuestas de los ítems anteriores.

g) Analicen cuáles de los siguientes gráficos podría corresponder con la función analizada.

Gráfico 1

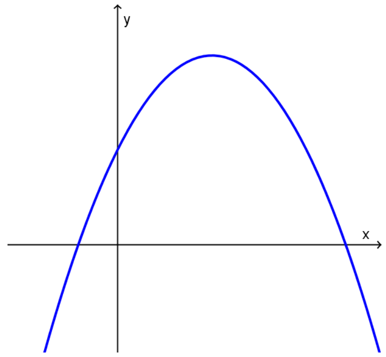


Gráfico 2

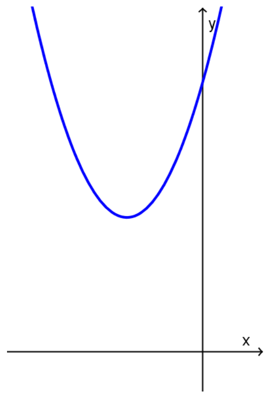


Gráfico 3

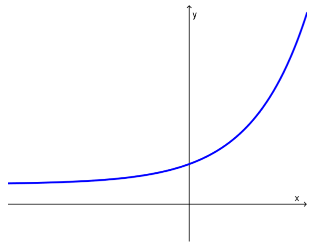


Gráfico 4

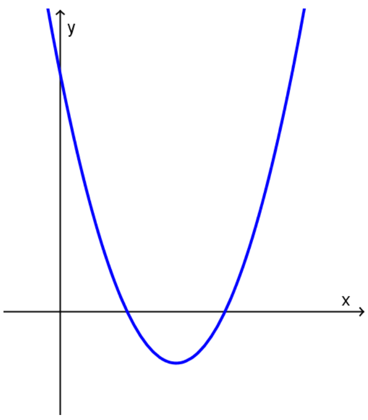


Gráfico 5

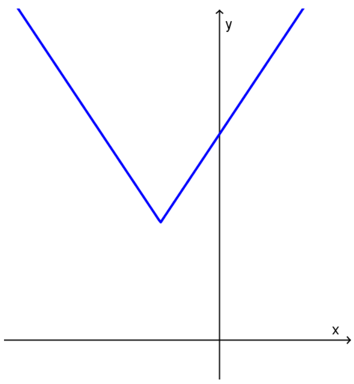


Gráfico 6

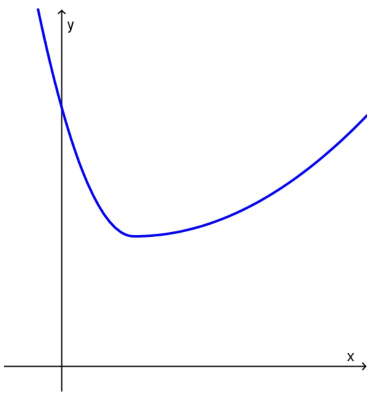


Gráfico 7

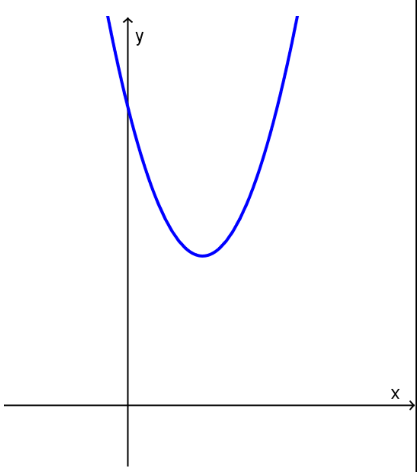
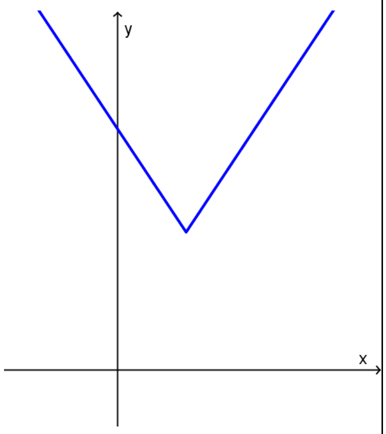


Gráfico 8



4) Dadas las siguientes funciones, hallen el máximo o el mínimo valor que puede alcanzar cada una de las funciones y en qué valor de x lo alcanza:

a) $f(x) = (x + 5)^2 - 4$ b) $g(x) = -2(x - 5)^2 + 1$

c) $h(x) = 5 - (4x+3)^2$ d) $i(x) = (7x - 5)^2 + 18$

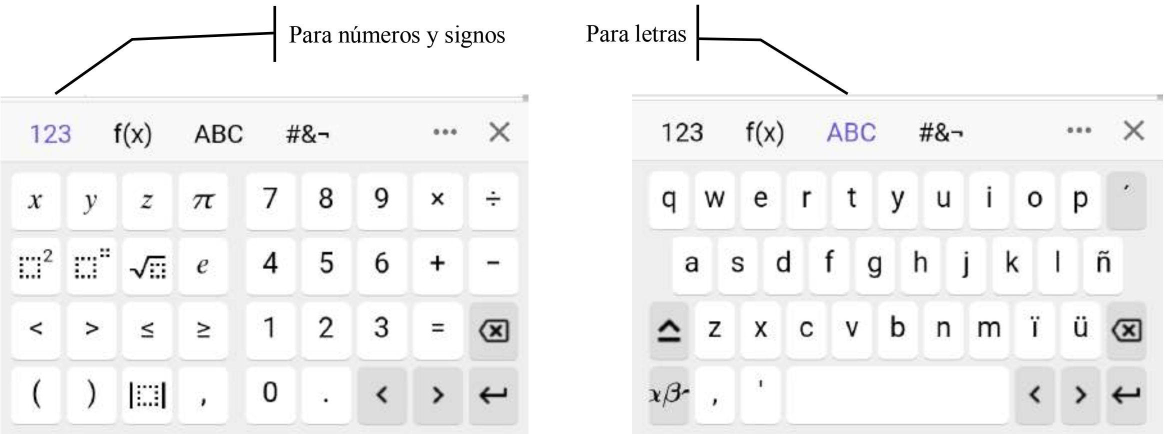
5) (para hacer con GeoGebra en el celular)

Ingresen a www.geogebra.org/classic.

Tipeen lo siguiente (en orden):

a = 1 ***b = 2*** ***c = 3***

$$\boldsymbol{f(x) = a(x + b)^2 + c}$$



En cada caso, modifiquen los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y/o $\boldsymbol{c}$ de manera que la función

$$f(x) = a(x + b)^2 + c:$$

Para cada ítem, una vez lograda la función pedida:

- *En los casos donde sea posible, capturen la pantalla de GeoGebra y péguenla un archivo de Word. Si no es posible, porque no existe o no es posible hallarla con GeoGebra, expliquen por qué.*
- *Escriban la fórmula que obtuvieron.*
- Expliquen cómo se dan cuenta que la fórmula que obtuvieron cumpla con lo pedido.

a) tenga un valor máximo igual a 3,6. Si no es única, propongan otra.

b) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un máximo igual a 3,6?

c) Tenga un valor mínimo igual a –4,1. Si no es única, propongan otra.

d) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un mínimo igual a –4,1?

e) Tenga un valor máximo igual a 3,6 y que se alcance en x = 2. Si no es única, propongan otra.

f) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un máximo igual a 3,6 que se alcance en x=2?

g) Tenga un valor mínimo igual a 2 y se alcance en x = –5. Si no es única, propongan otra.

h) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f tenga un mínimo igual a 2 que se alcance en x=–5?

i) ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que la función f no interseque (no ¨toca¨ ni ¨atraviesa¨) al eje de las x?

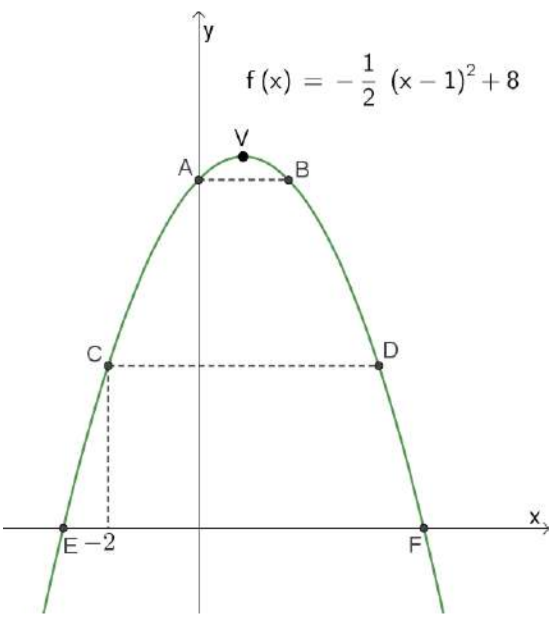
j) Tenga el vértice en el punto (5;–8) y el gráfico pase por el punto (9;0).

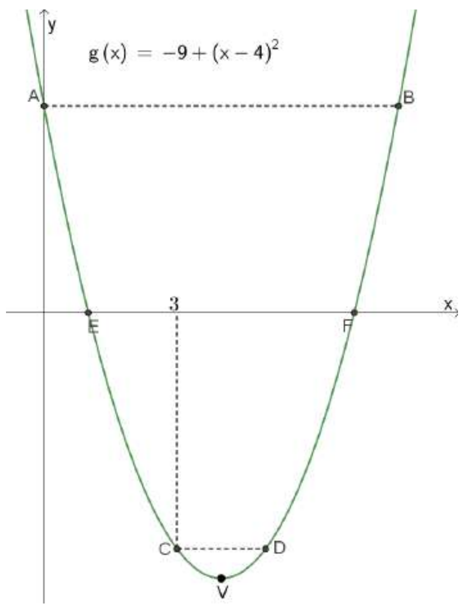
k) Tenga el vértice en el punto (4;7) y el gráfico pase por el punto (2;1).

l) Tenga el vértice en el punto (–2;10) y el gráfico pase por el punto (0;1).

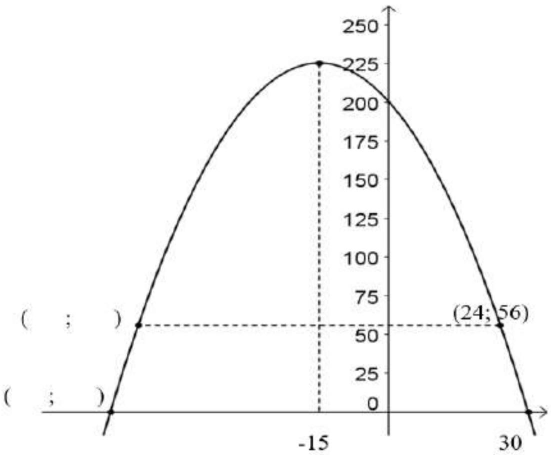
m) Tenga el vértice en el punto (–3;–5) y el gráfico pase por el punto (0;1).

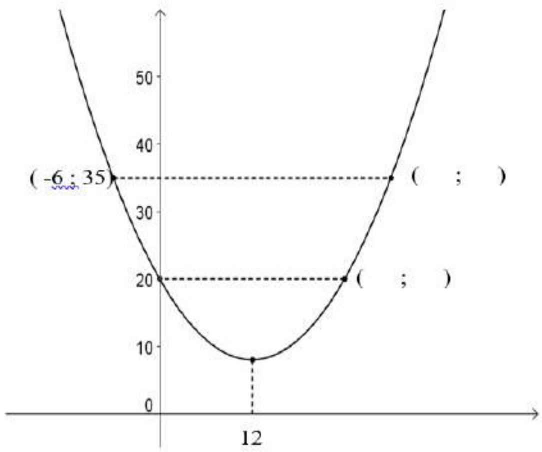
6) Los segmentos con líneas punteadas que unen puntos de las parábolas son paralelos a los ejes coordenados.
Hallen, en cada caso, las coordenadas del punto V (vértice) y de los puntos A, B, C, D, E y F.

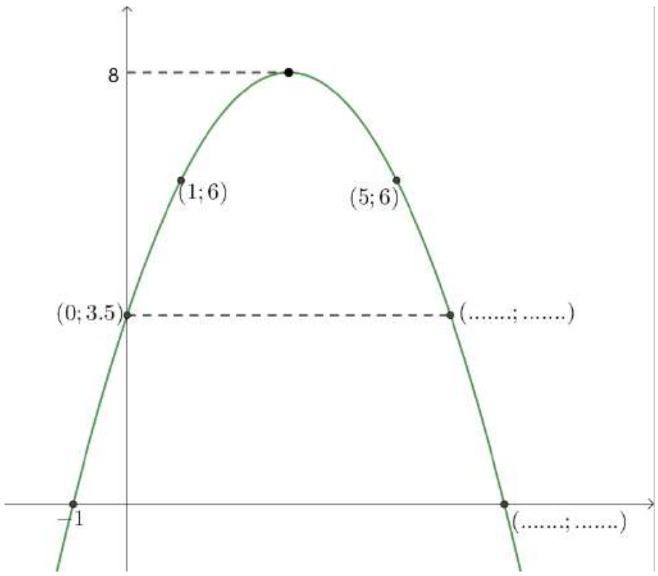




7) Para las siguientes parábolas, completen las coordenadas de los puntos marcados:





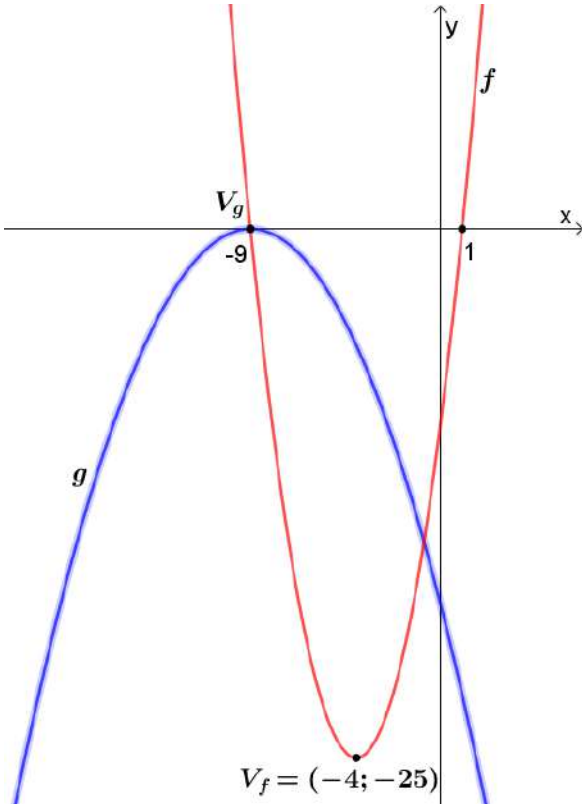


8) Grafiquen, sin usar GeoGebra, las siguientes funciones. Coloquen las coordenadas del vértice y dos puntos simétricos.

$f(x) = -(x+2)^2 + 9$ $\qquad$ $g(x) = 4(x-3)^2 - 1$

$h(x) = -2(3x-1)^2 - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $i(x) = -2(x+3)^2$ $\qquad$ $j(x) = x^2$

RECORDAMOS ALGUNAS DEFINICIONES



El **conjunto de ceros** de una función está formado por los elementos del dominio, es decir 'x' que tienen imagen nula, es decir y=0.
Por ejemplo los conjuntos de ceros de las funciones *f y g* son $C_f^0 = \{-9;1\}$ *y* $C_g^0 = \{-9\}$.

El **conjunto de positividad** de una función está formado por los elementos del dominio, es decir 'x' que tienen imagen positiva, es decir 'f(x)>0'.
Por ejemplo los conjuntos de positividad de las funciones *f y g* son $C_f^+ = (-\infty;-9)\cup(1;+\infty)$ *y* $C_g^+ = \phi$.

El **conjunto de negatividad** de una función está formado por los elementos del dominio, es decir 'x' que tienen imagen negativa, es decir 'f(x)<0'.
Por ejemplo los conjuntos de negatividad de las funciones *f y g* son $C_f^- = (-9;1)$ *y* $C_g^- = R-\{-9\}$.

El **conjunto imagen** de una función está formado por los valores que puede tomar la variable dependiente 'y'.
Por ejemplo los conjuntos imagen de las funciones *f y g son* $\mathrm{Im}_f = [-25;+\infty)$ *y* $\mathrm{Im}_g = (-\infty;0]$.

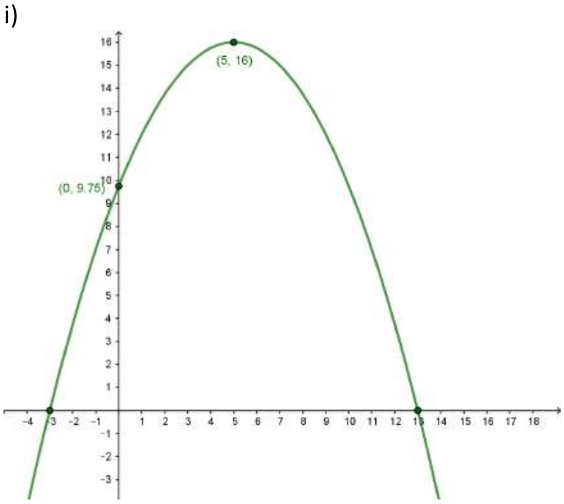
El **intervalo de crecimiento** de la función *f* es $(-4;+\infty)$ y el intervalo de crecimiento de la función *g es* $(-\infty;-9)$.

El **intervalo de decrecimiento** de la función *f* es $(-\infty;-4)$ y el intervalo de decrecimiento de la función *g es* $(-9;+\infty)$.

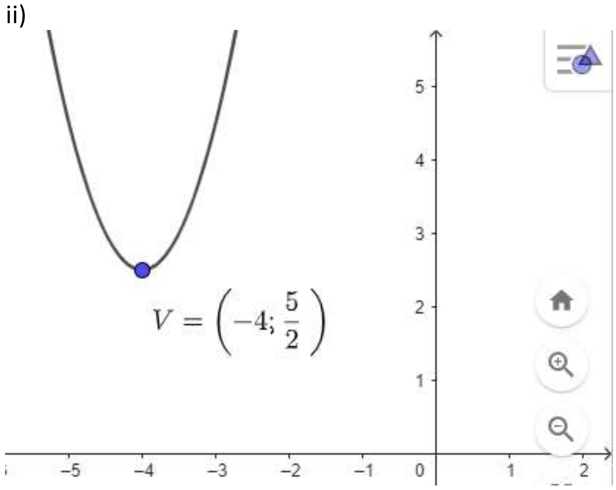
9)

a) Para cada una de las funciones representadas en los siguientes gráficos, indiquen su conjunto de positividad, su conjunto de negatividad, su imagen y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

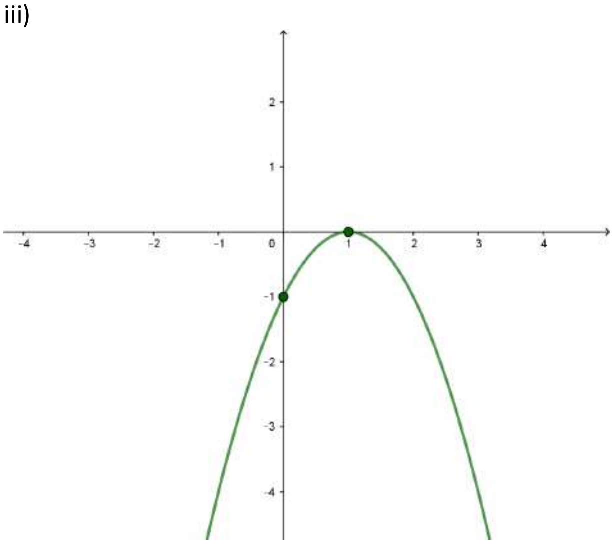
i)



ii)



iii)



10)

a) Hallen, para cada una de las funciones del Problema 8, el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento y conjunto imagen.

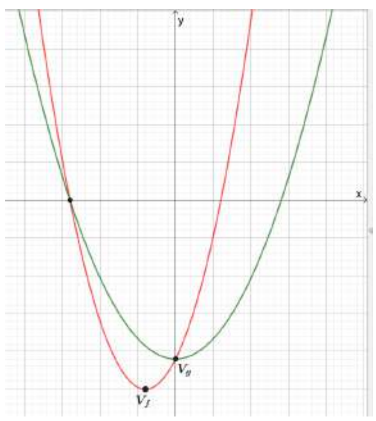
b) Escriban, si es posible, la ecuación de una parábola que tenga un máximo igual a 8 en x = – 7, y que pasa por el punto (–5;6). Luego hallen el conjunto de negatividad y el conjunto imagen.

c) Escriban, si es posible, la ecuación de una parábola que tenga un mínimo igual a –8 en x =1 y pase por el punto (9;0). Luego, hallen el conjunto de positividad y el conjunto imagen.

d) Escriban, si es posible, la fórmula de una función cuadrática que decrece en $(-\infty; 7)$ y tiene imagen $[0; +\infty)$. ¿Hay una sola posibilidad?

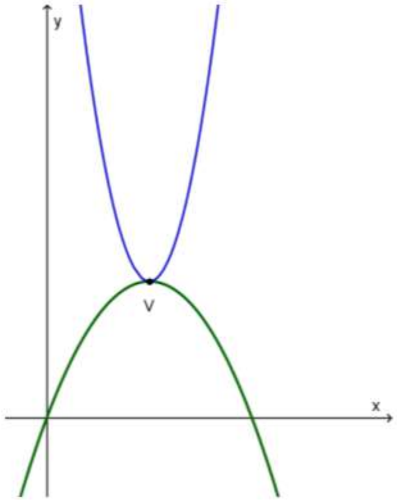
e) Escriban, si es posible, la fórmula de una función cuadrática que crece en $(-\infty; -2)$, tiene imagen $(-\infty; 12]$ y pasa por el punto (–1;9). Luego, hallen el conjunto de positividad y negatividad.

f) f) Una de las parábolas que se muestra tiene ecuación: $y = \frac{1}{4}(x+8)^2 - 25$. Los puntos V_f y V_g son los vértices de las parábolas f y g respectivamente. Las parábolas f y g se cortan en los ejes coordenados.



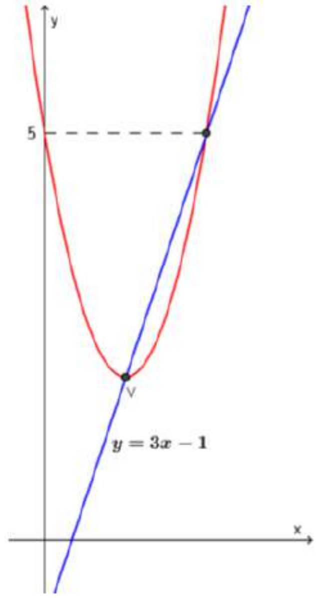
Determinen a qué parábola corresponde la fórmula dada y hallen la fórmula de la otra.

g) El conjunto imagen de la función cuadrática cuyo gráfico pasa por los puntos (3;–5) y (–9;–5) es $\mathrm{Im} = (-\infty;4]$. Determinar el conjunto de positividad y negatividad de la función.

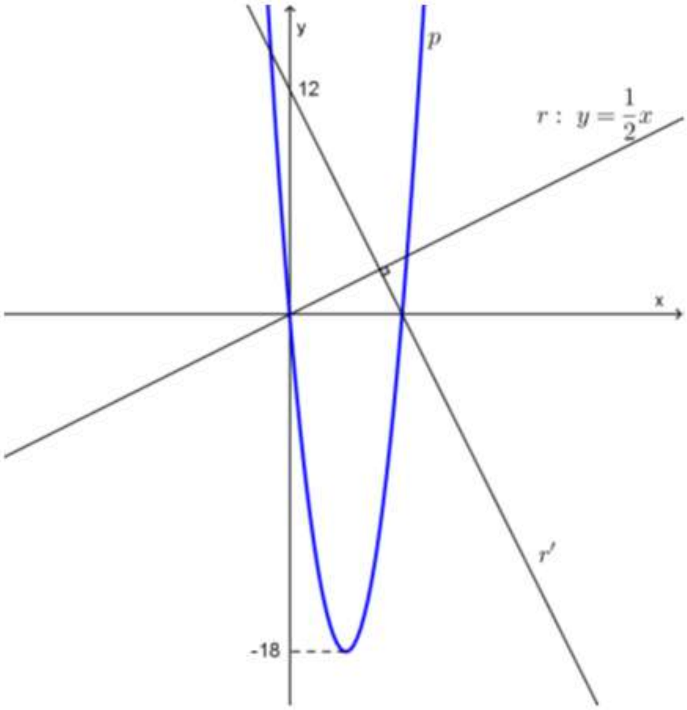


h) Las dos parábolas que se muestran a continuación comparten el vértice. La fórmula de una de ellas es $y = (2x-3)^2 + 2$. El origen de coordenadas pertenece a uno de los gráficos. Hallar la fórmula de la otra.

i) La recta de ecuación y = 3x – 1 pasa por el punto V (vértice de la parábola). Hallen la fórmula de la parábola.



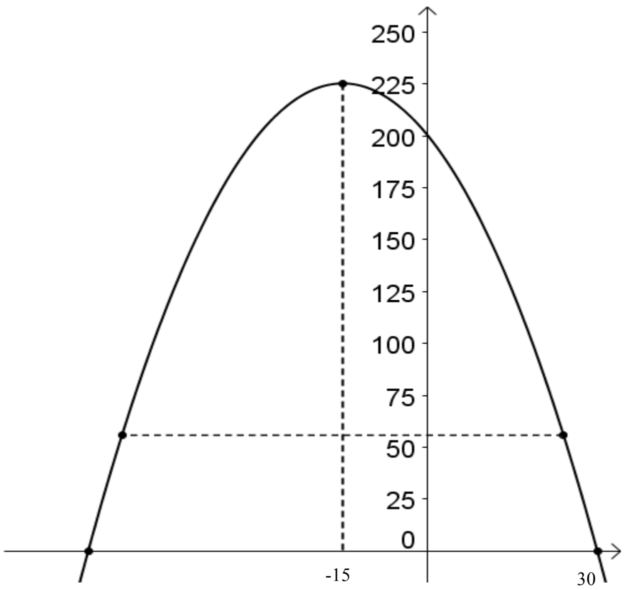
j) En la imagen se muestran una parábola y dos rectas perpendiculares. Las raíces de las rectas coinciden con las raíces de la parábola.



Determinen la ecuación de la parábola p.

SEGUNDA PARTE

1) Marcar todas las fórmulas que pueden corresponder al gráfico. Expliquen por qué.



a) $y = -\frac{1}{9}(x+15)^2 + 225$

b) $y = \frac{1}{9}(x+15)^2 + 225$

c) $y = -\frac{1}{9}(x+60)(x-30)$

d) $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{30}{9}x + 225$

e) $y=\frac{1}{9}x^2+\frac{30}{9}x+200$ f) $y=-\frac{1}{9}x^2-\frac{30}{9}x+200$

2)

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones tienen el mismo gráfico que $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+4{,}5$

I) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$ II) $y=-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$

III) $y=-\frac{1}{2}(5x-5)^2+4{,}5$ IV) $y=-\frac{1}{2}(x-2)x+4$

V) $y=-\frac{1}{2}(x-6)(x+4)-8$

b) *Consideren todas las funciones de la parte a),*

b_1) ¿En cuál o cuáles de las fórmulas pueden "leer" las coordenadas del vértice de la parábola que define?

b_2) ¿En cuál o cuáles pueden "leer" las raíces?

b_3) ¿Qué información pueden leer de las fórmulas IV y V?

b_3) Grafiquen la parábola y ubiquen en el gráfico la información que se puede leer en cada fórmula.

3) Para cada una de las siguientes funciones, se pide:

f(x) = – 2 (x – 3) (x + 5) g(x) = 2x (x + 6) h(x) = –x. (x + 21)

j(x) = x (x – 6) + 1

k(x) = (x – 9) (x +21) + 3 m(x) = (15 –5x)(x + 5) n(x) = x^2 + 65 p(x) = $(x – 4)^2$

a) Decidan si tienen máximo o mínimo y hállenlo.

b) Grafiquen las funciones anteriores. Ubiquen, en cada parábola, el vértice y un par de puntos simétricos.

4) Decidan, en cada caso, si f y g tienen el mismo vértice. Hallen las coordenadas del vértice.

a) f(x) = x^2 + 2x –1 g(x) = x(x+2) –1

b) f(x) = 2x(x–4) + 6 $\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{8}(x+2)(x-6)}$

c) $f(x) = x^2 - 4x$ $\quad$ $g(x) = (x+1)(x-5)$

d) $f(x) = 2x(x-6) + 10$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 6x + 1$

e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\quad$ $g(x) = 2x^2 - 8x + 7$

5) Realicen un gráfico aproximado de la siguiente parábola: $y = x^2 + 16x + 66$.

6)
A) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 metros por segundo.
Se sabe que $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$, es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra la piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a) ¿A qué altura se encuentra la piedra 0,5 segundos después de que fue lanzada?

b) ¿A qué altura se encuentra la ventana?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra y en qué momento la alcanza?

B) Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la piedra del problema anterior, simultáneamente, desde el suelo, se lanza otra piedra con una velocidad de 20 m/s. Se sabe que en este caso $j(t) = -5t^2 + 20t$ es la fórmula que permite calcular la altura a la cual se encuentra esta piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a) ¿En qué momento esta piedra vuelve a tocar el suelo?

b) Una persona sentada dentro de la habitación, ¿puede ver pasar a esta piedra?

c) ¿En algún momento las piedras alcanzan la misma altura? ¿A qué altura sucede esto?

d) ¿Dónde se encuentra la piedra que fue lanzada desde la ventana cuándo la que se lanzó desde el suelo alcanza la altura máxima?

7) Decidan si cada una de las siguientes funciones tiene máximo o mínimo y hállenlo. Confeccionen, en cada caso, un gráfico aproximado. Ubiquen dos puntos simétricos y el vértice.

$f(x) = -2(x-7)(x+1) - 3$ $\quad$ $g(x) = x(x+3) + 4$

$h(x) = x^2 + 5x$ $\quad$ $i(x) = -x^2 + 10x - 25$

$j(x) = 2x^2 - 6x$ $\quad$ $k(x) = 4x^2 + 3x$

$l(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ $\quad$ $m(x) = x^2 - 12x - 35$

8)

a) Propongan la fórmula de una función cuadrática que tenga raíces x = 0 y x = −4. ¿Es única?

b) Propongan las fórmulas de dos parábolas cuyos ceros sean 3 y −7.

c) ¿Cuál podrá ser la fórmula de una función cuadrática f que verifique: f(0) = f(4) =0 y Im=(−∞;8]?

d) Propongan la fórmula de una parábola que pase por los puntos (0;8), (−4;8). ¿Es única?

e) Propongan la fórmula de una parábola que pase por los puntos (0;8), (−4;8).y (−3;6).

9)

a) Hallen los ceros de la siguientes funciones $f(x) = 4(x+3)^2 - 100$
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

b) *Transformen, si es posible, las fórmulas del ítem a) para que se puedan "leer" las raíces.*

10)

a) Hallen el conjunto de ceros de las siguientes funciones cuadráticas:

m(x) = – 4(x – 2)(x –4) + 12 h(x) = $3x^2$ + 18x – 21 g(x) = – x^2 – 2x f(x) = – $2x^2$ – 4x –2 j(x) = $3x^2$ + 5

b) Transformen, si es posible, las fórmulas del ítem a) para que se puedan "leer" las raíces.

c) Hallen el conjunto de positividad, negatividad e imagen para cada una de las funciones del ítem a.

TERCERA PARTE

1) Demuestren que los valores de 'x' que satisfacen la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ (en el caso de que tenga solución), se pueden calcular con las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}.$$

2) Resuelvan las siguientes ecuaciones utilizando los resultados del ejercicio anterior:

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ **b)** $12x - 4 - 9x^2 = 0$ **c)** x.(x+3) = 5x+3 **d)** $x^2 = 3(x-1)$

Video con la resolución de la ecuación a.

Video con la resolución de la ecuación b.
Video con la resolución de la ecuación c.
Video con la resolución de la ecuación d.

3) Resuelvan las siguientes situaciones problemáticas:

a) En un rectángulo de área 40 cm^2, la base mide 3 cm más que la altura. Determinen el perímetro del rectángulo.

b) Uno de los lados de un rectángulo mide 4 cm más que el otro y su área es 96 cm^2. Calculen el perímetro del rectángulo.

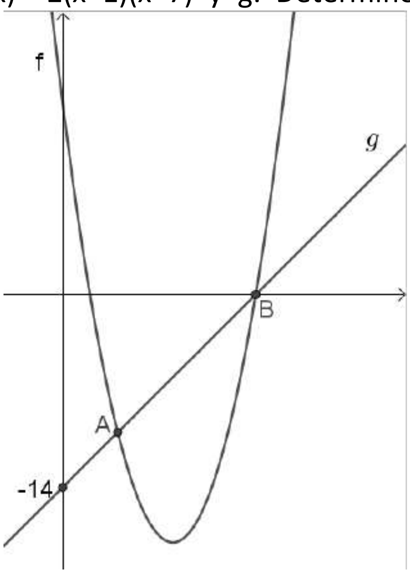
Video con las resoluciones de los ejercicios 3 a y b.

4) Determinen los puntos de intersección de la parábola con vértice en el punto (1; –7) que pasa por el punto (2; –5) y la recta de ecuación y = –2x+7. Grafiquen.
Video con la resolución

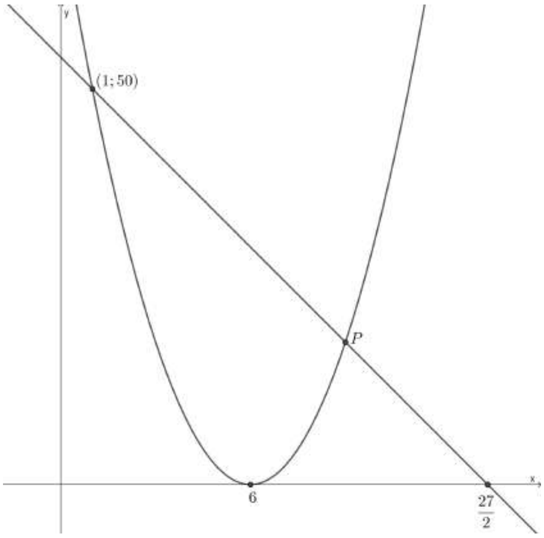
5) Una piscina rectangular de 15m de largo por 9m de ancho está rodeada por un camino de cemento de ancho uniforme. Si el área del camino es 81m^2 ¿Cuánto mide el ancho del camino?
Video con la resolución

6) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación.
La fórmula $h(t) = -5\,t^2 + 8t + 13$ permite calcular la altura "h" de una piedra, medida desde el suelo, "t" segundos después de ser lanzada.
a) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer el suelo?
b) ¿En qué momento del descenso la piedra está a 9m del suelo?
c) Grafiquen h. (Coloquen el punto que indica la altura máxima y las respuestas de los ítems a y b.

7) Se muestran los gráficos de $f(x) = 2(x-1)(x-7)$ y g. Determinen las coordenadas del punto A.



8) La parábola que se muestra tiene un único cero. La recta **r** corta a la parábola en los puntos (1;50) y P.



a) Determinen las fórmulas de la recta y la parábola.

b) Determinen las coordenadas del punto P.

9) Cuando se produce una cantidad t (en miles de toneladas) de una cierta mercadería, dos productores obtienen una ganancia mensual (en millones de pesos) que viene dada por las siguientes funciones

$$P_1(t) = -2(t - 1{,}5)(t - 6.5) \qquad P_2(t) = 2t - 7{,}5$$

Donde P_1 y P_2 son las ganancias del productor 1 y del productor 2 respectivamente. Los casos en los que las ganancias sean negativas se consideran como pérdidas.

Así, por ejemplo, si el productor 1 produce 5500 toneladas, su ganancia será de 8 millones de pesos ya que $P_1(5{,}5) = 8$. En cambio, si produjera 1000 toneladas, como $P_1(1) = -5{,}5$ sufriría pérdidas por 5,5 millones de pesos.

- **a.** Transformen la expresión $P_1(t)$ para que pueda leerse directamente la cantidad que debe producir el productor 1 para obtener la máxima ganancia.
- **b.** ¿Qué pérdida o ganancia obtiene el productor 2 si produce la misma cantidad que tiene que producir el productor 1 para obtener su máxima ganancia?
- **c.** ¿Cuál es la mínima cantidad que debe producir cada uno para no obtener pérdidas?
- **d.** ¿Cuánto deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

10) Determinen, si existen, el o los puntos en los cuales se intersecan las gráficas de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5x - 2$. Luego grafiquen ambas funciones de modo que se observen los puntos de intersección (si los hubiera).

Video con la resolución

11) El área de un rectángulo es 80 cm^2 y el perímetro 36 cm. Calculen las medidas de los lados del rectángulo.

Video con la resolución

12) Analicen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen.

a) El gráfico de $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{bx} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ tiene una sola raíz si $\mathbf{b^2 - 4.a.c = 0.}$

b) Para que la familia de parábolas dadas por la fórmula $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{bx} + \mathbf{9}$ tengan dos raíces, **b** tiene que tomar exclusivamente valores del intervalo $(3; +\infty)$.

c) El único valor posible de **c** para que el gráfico de $h(\mathbf{x}) = \mathbf{-2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3x} + \mathbf{c}$ no corte al eje X, es $\boldsymbol{c} = \mathbf{-2.}$

13) Sea $f(x) = 3x^2 + bx + 1$ indiquen para qué valores de *b.*

a. $f(x)$ tiene exactamente una raíz.

b. El gráfico de $f(x)$ no “toca” ni “atraviesa” al eje X.

14) Vuelvan al ejercicio 8 y propongan una recta paralela a **r** que corte a la parábola en un solo punto. Determinen las coordenadas del punto de intersección.

Unidad 3: Funciones polinómicas

Definición

La expresión: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se denomina **POLINOMIO** de grado n.

Ejercicios

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

a) x^3
b) $\sqrt{5+x^2}$
c) $\frac{x+1}{x}$
d) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}$
e) x
f) $\sqrt{x+2}$
g) $(x-1)(x+3)$
h) h) 0
i) 1
j) $\frac{1}{x}$
k) $3x^{-2}$

2) Completar y ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la variable y determinar sus grados, el coeficiente principal y el valor del término independiente.

a) $\frac{1}{2} + x^4 - 2x^2$
b) $-1 + x$
c) -3
d) 0
e) $-\frac{3}{4}x^5$
f) $-\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
g) $\sqrt{3} + \sqrt{2}x^2$
h) $\frac{x-1}{2} + \frac{2-x-x^2}{3}$

3) Determinar a, b y c (números reales) tales que los siguientes polinomios sean iguales:

a) $p(x) = a(3x-5) + b(2x-1) + cx^2$ y $q(x) = 6 - 5x$
b) $p(x) = a(2x+1) + (bx+c)(2x-1)$ y $q(x) = (x+1)(4x+3)$

Nota: la igualdad de polinomios significa que son del mismo grado y PARA TODO VALOR DE X se verifica que $p(x) = q(x)$. Esto significa la igualdad de las expresiones algebraicas.

Notemos la diferencia con la resolución de ecuaciones. En una ecuación, también se plantea una igualdad, pero esa igualdad se verifica sólo para algunos valores que son sus soluciones o raíces.
Por ejemplo, cuando se pide resolver la ecuación $7(3x-5) + 2(2x-1) + 3x^2 = 6 - 5x$ se pide que se hallen, si existen, el o los valores de x que satisfacen esta igualdad, que obviamente NO se verifica para todo x.

Definición

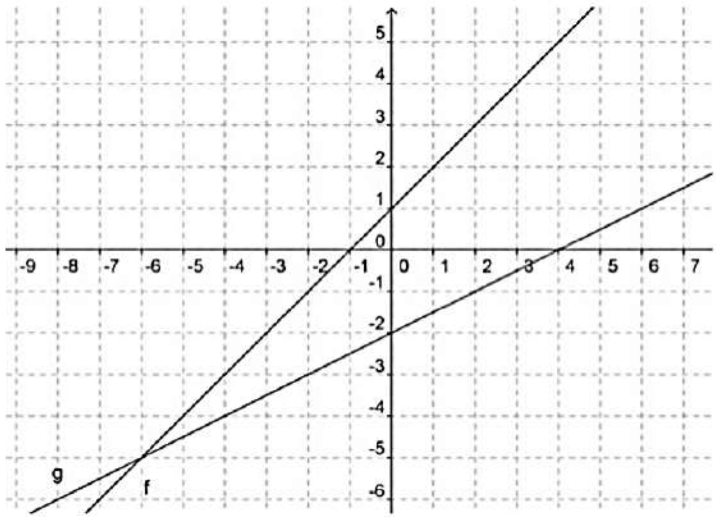
La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ se denomina **<u>función polinómica</u>** de grado n.

Las funciones lineal y cuadrática que hemos estudiado en las unidades anteriores son casos particulares de esta cuando n es menor o igual a 2 .

En esta unidad trabajaremos con funciones polinómicas de cualquier grado.

4) Sean f y g dos funciones lineales, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A partir de los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$ que se dan a continuación



a) Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso:

i. $h(0) =$	v. $h(-2) =$
ii. $h(2) =$	vi. $h(4) =$
iii. $h(6) =$	vii. $h(-8) =$
iv. $h(3) =$	viii. $h(4{,}5) =$

b) Decidir si $h(x)$ es negativa, positiva o cero:

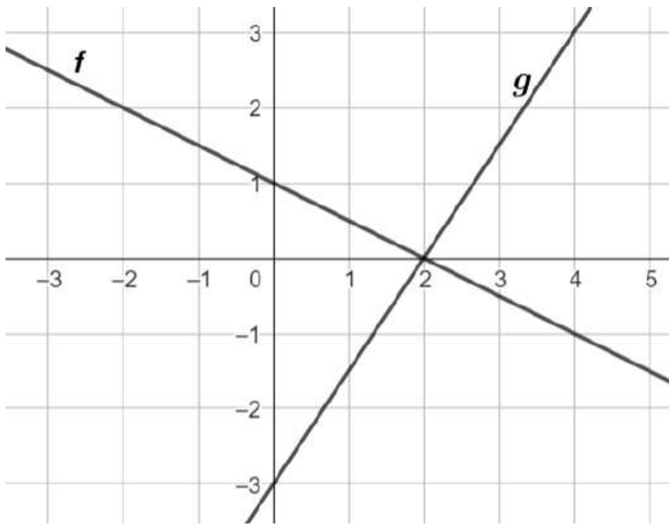
i. $h(-10) =$	iv. $h(5) =$
ii. $h(-20) =$	v. $h(-2{,}5) =$
iii. $h(-1) =$	

c) Hallar $h(-15)$.

d) Hallar la forma general de $h(x)$ y realizar un gráfico aproximado.

5) En el siguiente sistema de coordenadas se da la representación gráfica de $f(x)$ y de $g(x)$, ambas funciones lineales. Definimos

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$



a) Establecer el conjunto de valores de x para los cuales la función $h(x)$ es positiva, negativa o cero.

b) Proponer un gráfico aproximado de $h(x)$.

c) Escribir la forma factorizada y general de la función $h(x)$.

Llamamos **intervalo de positividad** de una función al subconjunto del dominio en el cual f es positiva, es decir $C^{+}(f) = \{x \in D_f / f(x) > 0\}$

Análogamente, **intervalo de negatividad** de f: $C^{-}(f) = \{x \in D_f / f(x) < 0\}$

6) a) ¿Es cierto que siempre que “multiplicamos” dos rectas obtenemos una parábola?

b) ¿Cómo obtenemos los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la parábola a partir de los gráficos de las rectas?
c) ¿Es cierto que toda parábola puede ser escrita como el “producto” de dos rectas?
d) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola que tenga máximo?
e) ¿Cómo deben ser las rectas para que su “producto” sea una parábola con un cero doble? ¿Y con dos ceros simples?
Sugerimos usar geogebra.

7) a) Se sabe que $h(x) = -8x^2 - 4x + 24$ es producto de dos funciones lineales $g(x)$ y $f(x)$. ¿Puede ser $g(x) = 2x + 4$? Si les parece que sí, encontrar f. Si les parece que no, justificar.
b) Estudiar la misma situación del ítem a) si $h(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 9$ y $g(x) = x + 2$.

División de polinomios
Dados p(x) y q(x) dos polinomios, $q(x) \neq 0$ y $gr[p(x)] \geq gr[q(x)] \Rightarrow$ existen y son únicos c(x) y r(x) tales que: $p(x) = q(x).c(x) + r(x)$, siendo:
p(x) el dividendo, q(x) el divisor, c(x) el cociente y r(x) el resto, verificandose que gr r(x)<gr q(x) ó r(x)=0.

Ejemplo:
Sean $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$
Para efectuar la división los polinomios deben ordenarse según potencias decrecientes de x y el dividendo debe completarse.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 0x - 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 2x^3 - x^2 & x^2 - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^2 + 0x - & \\
3x^2 - 6x + 3 & \\ \cline{1-1}
-6x &
\end{array}
$$

Así, el cociente es $C(x) = x^2 - 3$ y el resto $R(x) = -6x$

8) Dividir $a(x)$ y $b(x)$, en cada caso:
a) $a(x) = 3x^3 - 2x^5 - 2x^2 - 2x + 5$ y $b(x) = x^3 - x + 2$

b) $a(x) = 5x^4 - 2x^5 - x^2 + 1$ y $b(x) = -2x^2 - x$

c) $a(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ y $b(x) = -x + 1$

Regla de Ruffini
Se utiliza para hallar los coeficientes del cociente y el resto de la división de un polinomio por otro que guarda la forma: $x - a$ con a número real.

Ejemplos:

I] Hallar el cociente y el resto de la división

$$(-6x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2):(x + 1)$$

La disposición práctica es la siguiente:

			-6	2	-1	-1	2
			coeficientes del dividendo				
opuesto del termino ind. del div.		-1		6	-8	9	-8
	o sea, "a"		-6	8	-9	8	-6
			coeficientes del cociente			resto	

$C(x) = -6x^3 + 8x^2 - 9x + 8 \quad R(x) = -6$

II] $(7x^4 + 1 - 2x^2):(x - 3)$

	7	0	-2	0	1
3		21	63	183	549
	7	21	61	183	550

$C(x) = 7x^3 + 21x^2 + 61x + 183 \quad R(x) = 550$

Notas:

a) En todos los casos de división entre un polinomio p(x) y un binomio de la forma $x - a$ el resto es una constante. Justificar.

b) Cuando el resto es cero se dice que el dividendo es divisible por el divisor.

Ejemplos:

I] (x^2-9): (x-3)

c(x)=x+3 r(x)=0

$x^2-9=(x-3)(x+3)$ hemos factorizado el dividendo

II] Polinomios ya factorizados:

$y=x^2(x-1)$ es una función polinómica de grado 3. Sus ceros son $x_1=0$ (doble) y $x_2=1$ (simple)

$y=2x(x-1)^2(x+2)^3$ es una función polinómica de grado 6. Sus ceros son $x_1=0$ (simple) $x_2=1$ (doble) y $x_3=-2$ (triple)

$y=x(x+1)(x^2+1)$ es una función polinómica de grado 4. Tiene solo 2 ceros reales x=0 y x=-1

Teorema del resto

El resto de la división p(x) : (x-a) con a real es r=p(a)

Lo demostraremos:

p(x)	x-a
r	q(X)

p(x)=(x-a).q(x)+r

p(a)=(a-a)q(a)+r=r

Ejemplo: Siendo $p(x)=x^3+kx^2-kx-9$ determinar k para que –3 sea raíz de p(x).

$p(-3)=0=(-3)^3+k(-3)^2-k(-3)-9 \qquad k=3$

O sea $p(x)=x^3+3x^2-3x-9$ es divisible por (x+3), o sea por (x-(-3))

Podría factorizarlo:

	1	3	-3	-9
-3		-3	0	9
	1	0	-3	0

p(x)=(x+3)(x^2-3)

IMPORTANTE:
$$Si\ P(a)=0 \leftrightarrow x=a\ es\ raíz\ de\ P(x)$$
$$\leftrightarrow P(x)\ es\ divisible\ por\ (x-a)$$
$$\leftrightarrow P(x)=(x-a)\cdot C(x)$$

9) Obtener mediante la regla de Ruffini el cociente y el resto de la división entre a(x) y b(x). Verificar utilizando el teorema del resto.

a) $a(x)=x^5+2x^3-2x^2+1 \qquad b(x)=x-2$

b) $a(x)=-\frac{1}{2}x^3+x-1 \qquad b(x)=x+2$

c) $a(x)=x^3+m^3 \qquad b(x)=x+2$

d) $a(x)=16x^4+1 \qquad b(x)=x+1$

e) $a(x)=-x+2-x^2+x^5 \qquad b(x)=x-\frac{1}{2}$

f) $a(x)=mx^4-m^5 \qquad b(x)=x-m$

g) $a(x)=(x-3)^2-2(x+1) \qquad b(x)=2x-(x-1)$

10) Calcular m para que a(x) sea divisible por b(x)

a) $a(x)=x^4-mx^2+1 \quad y \quad b(x)=x+1$

b) $a(x)=-x^3+mx^2-mx+2 \quad y \quad b(x)=x+2$

c) $a(x)=2x^2-3x-9 \quad y \quad b(x)=x-m$

11) Sea a(x)=$2x^4$-x^2+mx-m, calcular "m" sabiendo que la diferencia de los restos de su división por (x+m) y (x-m) es igual a −1.

12) Calcular el valor de a, si r es el resto de p(x):q(x)

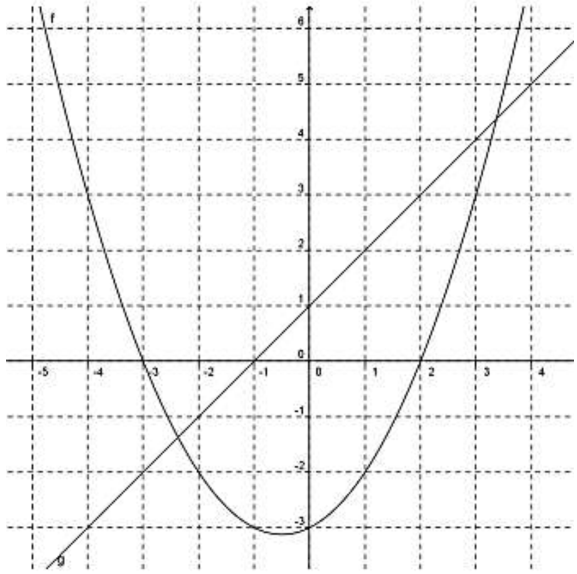
a) p(x) = $4x^3$-x^2+ax-2 , q(x) = x-2 , r = 26

b) p(x) = $5x^4$+ax^2+ax^3+$3x^2$, q(x) = x-3 , r = 0

c) p(x) = $3ax^4$+(a+1)x^3+$2x^2$, q(x) = x+1, r = -1

13) En una división de polinomios se cumple que:

divisor: $2x^2+x+5$ cociente: x^2+x resto: $x+6$
hallar el polinomio dividiendo.



14) A continuación se dan los gráficos de $f(x)$ y de $g(x)$. Considerar la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a) Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso:

i. $h(1) =$ iv. $h(-2) =$
ii. $h(0) =$ v. $h(3) =$
iii. $h(-3) =$ vi. $h(-4) =$

b) Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:

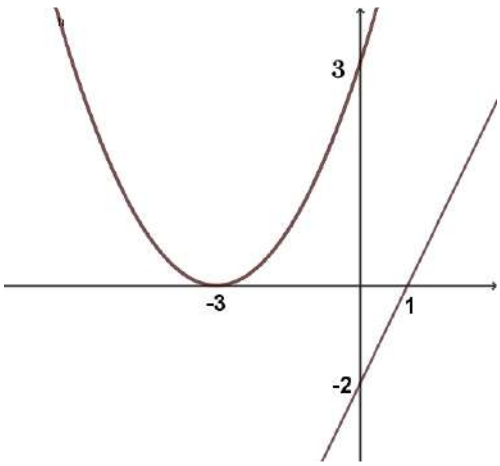
i. $h(6) =$ iv. $h(0) =$
ii. $h(1{,}5) =$ v. $h(-2{,}5) =$
iii. $h(-4) =$ vi. $h(-20) =$

c) Indicar ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.

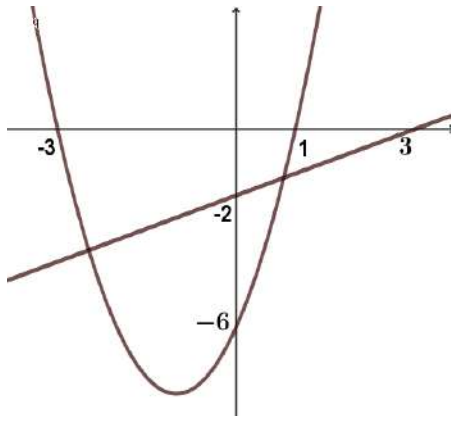
d) Hallar la forma factorizada y general de $h(x)$ y realizar un gráfico aproximado.

15) A partir de la información dada en cada uno de los gráficos, hallar la expresión factorizada de cada función $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a)

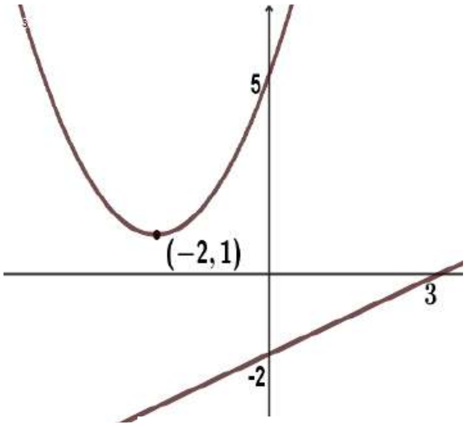


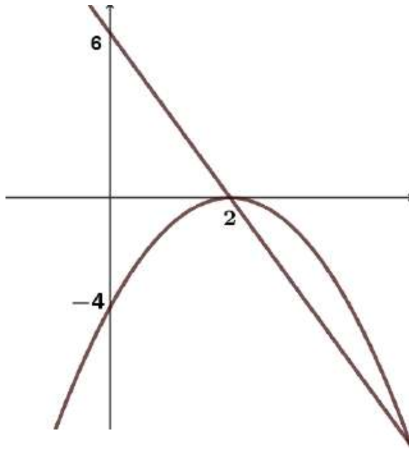
b)



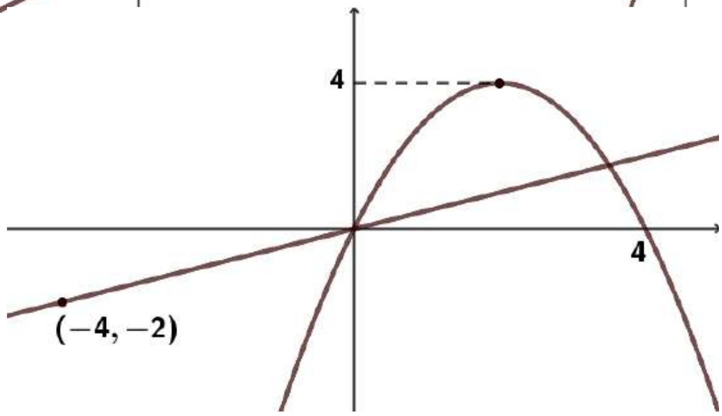
c)

d)





e)



- **Sobre los ceros (o raíces) de una función polinómica:**

Los ceros de una función polinómica son las raíces de la ecuación:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$
Si esta ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>simple o múltiple de orden impar,</u> la gráfica de f atraviesa al eje x en x_0.
Si la ecuación asociada a la función tiene raíz x_0, <u>múltiple de orden par,</u> la gráfica de f no atraviesa al eje x en x_0.

Ejemplo:
Dada la función polinómica: $f(x) = x^3 - 3x$ deseamos conocer los ceros y los intervalos en los cuales la función toma valores positivos o negativos.

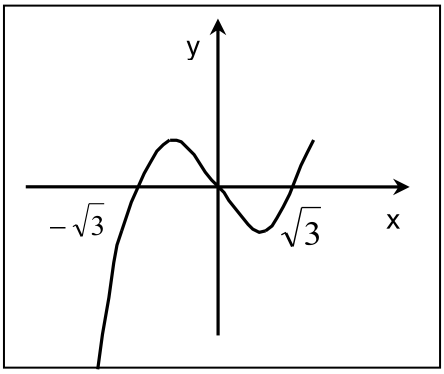
$$f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$$

Ceros: x=0 x=$\sqrt{3}$ x=$-\sqrt{3}$
Son tres ceros simples ⇒ la gráfica de f atraviesa al eje x en cada uno de ellos.

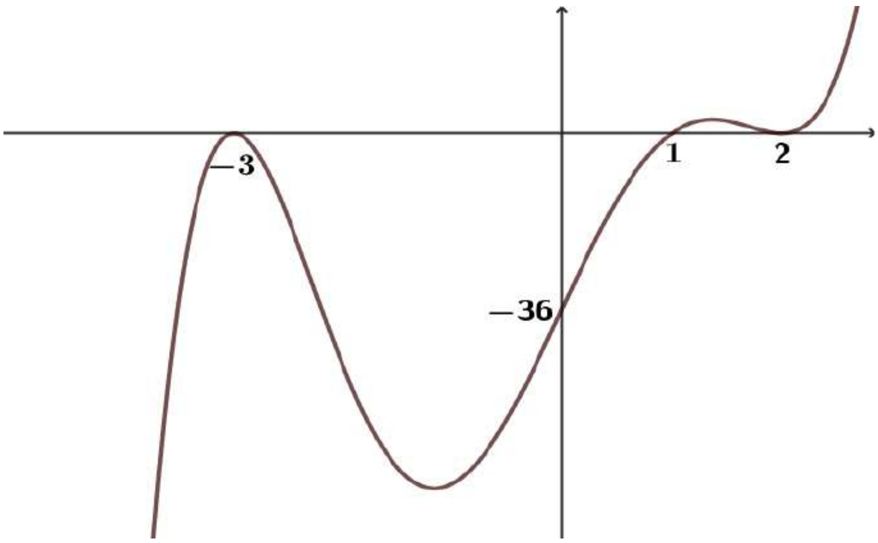
Completar la tabla con signo + si la función es positiva y signo – si es negativa.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f(x)							

Si además de esto pudiéramos encontrar los máximos y mínimos podríamos dibujarla.
(la función polinómica es continua)



16) Escribir un polinomio P(x) cuyo gráfico sea el siguiente. ¿Es único?



17) En cada caso, hallar, si existe, la fórmula de una función cúbica h que verifique lo pedido. Si les parece que no existe explicar por qué:

a) Las raíces son -5, -2 y 4, y h toma valores negativos para x mayores que 4. ¿Es única?

b) Las raíces son -3, 2 y 8 y el gráfico de h corta al eje de las y en 12. ¿Es única?

c) Las raíces son solamente 0 y -1 y $h(1) = 10$. ¿Es única?

d) que tenga un solo cero y esté en $x = 7$. ¿Es única?

e) que tenga un solo cero, que esté en $x = 7$ y que sea una raíz simple. ¿Es única?

f) que tenga un cero doble en $x = -5$. ¿Es única?

g) que tenga como única raíz $x = -5$ y que su orden de multiplicidad sea 2.

h) que tenga ceros en $x = -\frac{1}{5}, x = 3, x = -3$ y en $x = 0$.

i) que no tenga ceros.

18) La función $h(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$ es el produto de $g(x)$ y $f(x)$.

a) ¿Puede ser que una de ellas sea $g(x) = -2x - 1$? Si les parece que sí encuentren f. Si les parece que no, justificar.
b) ¿Y si fuera $g(x) = x - 1$?
c) Si es posible, escribir $h(x)$ como produto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.

19) Dadas las funciones:

$$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + x \qquad h_2(x) = -2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$$

$$h_3(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 \qquad h_4 = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

a) ¿Todas estas funciones tienen por raíz $x = 1$? Usando este dato busquen, si es posible, una recta y una parábola cuyo producto sea h.
b) Si es posible, escribir las funciones polinómicas dadas como producto de tres lineales. De no ser posible, explicar por qué.
c) Realizar un gráfico aproximado de cada función h.

20) Escribir un polinomio que cumpla con las condiciones pedidas.
a) de grado 4 que tenga como únicas raíces a: –1 y 2.
b) de grado 4 que tenga al menos 2 raíces simples reales: –1 y 2.

21) Escribir, en cada caso, un polinomio que cumpla las siguientes condiciones:
a) de grado 8 tal que –1 es una raíz de multiplicidad 3, cero sea una raíz de multiplicidad 5 y cuya gráfica pase por el punto $(-2; -8)$.
b) de grado 5 tal que sus únicas raices reales sean x= 1 de multiplicidad 2 y x= -2 de multiplicidad 1 y ademas p (-1) = 3

22) Mostrar que 1 es una raíz de multiplicidad 3 de $p(x)=x^4+x^3-9x^2+11x-4$. Encontrar la otra raíz.

23) Sea $P(x) = a \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x + m)$ un polinomio de grado 3, hallar $a, m \in R$ sabiendo que $C^+ = (-\infty; -7)$ y $P(0) = -14$.

24) Determinar una función polinómica y graficar aproximadamente:
a) de grado 4 sabiendo que $C^0 = \{2; 4\}$, $C^- = \emptyset$ y $f(3) = \frac{1}{2}$.
b) de grado 3 sabiendo que $C^- = (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$ y la ordenada al origen es $y = -9$.
c) de grado mínimo, cuya ordenada al origen sea $y = -10$, sus únicas raíces sean -5, -1, 3 y 4, y $C^+ = (-5; -1) \cup (4; +\infty)$.
d) de grado 4 cuyo conjunto de negatividad es $C^- = (-3; 0)$; su coeficiente principal es $1/90$, $P(2) = 4/9$ y todas sus raíces son reales.
e) de grado 4 cuyo $C^+ = \emptyset$, $C^- = R$ y pasa por el punto $(0; -5)$.

Factorización de un polinomio

Cuando b es un cero o raíz de un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,
(x-b) es divisor de p(x), luego p(x) podría factorizarse como:
p(x)=(x-b)q(x), siendo q(x) el cociente de la división

Es posible que q(x) tenga más raíces con lo que puede iterarse el proceso factorizando q(x). Es decir, p(x) puede descomponerse en más factores si conocemos todas sus raíces reales.

$$p(x) = a_n(x-b_0)(x-b_1).....(x-b_n)$$

Ejemplo: la factorización de una función polinómica de grado 3 cuyos ceros son x_1=0 x_2=1 y x_3=-2, es: y=a.x.(x-1).(x+2)

El valor de "a" no está determinado, por lo tanto existen infinitas funciones que cumplen con la condición. Podemos obtener una de ellas dándole un valor cualquiera a "a"no nulo.
Si se pidiese que la función sea tal que además cumpla que f(2)=4
f(2)=a.2(2-1)(2+2)=4⇒ $a = \frac{1}{2}$, es decir, "a" queda determinado

$$y = \frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

Nota aclaratoria:
Un polinomio de grado no nulo es primo cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. Son primos únicamente los polinomios de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales. Cuando un polinomio no es primo es compuesto.

Teorema de Gauss
Sea $m(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio en el cual sus coeficientes son números enteros. Si existen raíces racionales de m(x), entonces dichas raíces son de la forma $\frac{p}{q}\ donde \begin{cases} p\ divide\ a\ a_0 \\ q\ divide\ a\ a_n \end{cases}$ con p y q primos entre sí y $a_0 \neq 0$.
Si bien las raíces de un polinomio de las características enunciadas pueden no ser racionales, el teorema de Gauss permite buscar fácilmente sólo las que lo son, logrando una factorización del polinomio *m(x)*.

Ejemplos**:**
I] Factorizar p(x)=$x^4+2x^3-7x^2-8x+12$
Vemos que a_n=1 y a_0=12.

divisores de $a_0 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$
divisores de $a_n = \{\pm1\}$
$\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$

Por ser a_n=1 vemos que los divisores de 12 son las posibles raíces de *m(x)*
m(1)=0⇒ $1\quad es\quad raíz$

	1	2	-7	-8	12
1		1	3	-4	-12
	1	3	-4	-12	0

m(x)=(x-1)($x^3+3x^2-4x-12$)

Buscamos las raíces de $x^3+3x^2-4x-12$

Probemos con 1: 1+3-4-12≠0, 1 no es raíz
Probemos con –1: $(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 12 \neq 0$, -1 no es raíz
Probemos con 2 : $2^3 + 3.2^2 - 4.2 - 12 = 0$, 2 es raíz

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

m(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)
factorizamos el trinomio de segundo grado: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
Luego, la factorizaci'on resulta

m(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)

II] m(x)=$3x^3$+$8x^2$-2x-4. Se ve que a_n=3 y a_0=-4
Buscamos los divisores de 4 y de 3.

Cualquier raíz debe estar entre los números: $\pm\frac{2}{3}$, ± 2, $\pm\frac{1}{3}$, ± 1, ± 4, $\pm\frac{4}{3}$
De estas 12 posibles sólo 3 pueden ser raíces de la ecuación $3x^2 + 8x^2 - 2x - 4 = 0$

$$m\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

	3	8	-2	-4
-0.67		-2	-4	4
	3	6	-6	0

$$m(x) = (x + \frac{2}{3})(3x^2 + 6x - 6)$$

Factorizamos el trinomio de segundo grado

$$3x^2 + 6x - 6 = 3\left(x - \left(-1 + \sqrt{3}\right)\right)\left(x - (-1 - \sqrt{3})\right)$$

y vemos que sus raíces no son racionales, no hubieran surgido de Gauss: se puede probar que ninguno de los otros 11 valores es raíz del polinomio.
Hemos factorizado el polinômio $m(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)$

25) Factorizar
a) $x^2 - 2x + 3 + (x+1)^2$
b) $x^4 - 5x^2 + 4$
c) $-4x^4 + 12x^2 - 9$
d) $x^4 - 64$
e) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$
f) $8x^4 - x$
g) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$
h) $x^5 - 2x^4 + 3x - 6$
i) $\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{6}$

j) $t(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$

k) $r(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 8x + 8$

26) Determinar las raíces de los polinomios, establecer la multiplicidad de cada raíz y graficar aproximadamente.

a) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2$

b) $t(x) = x^3(x^2 - 4)^2$

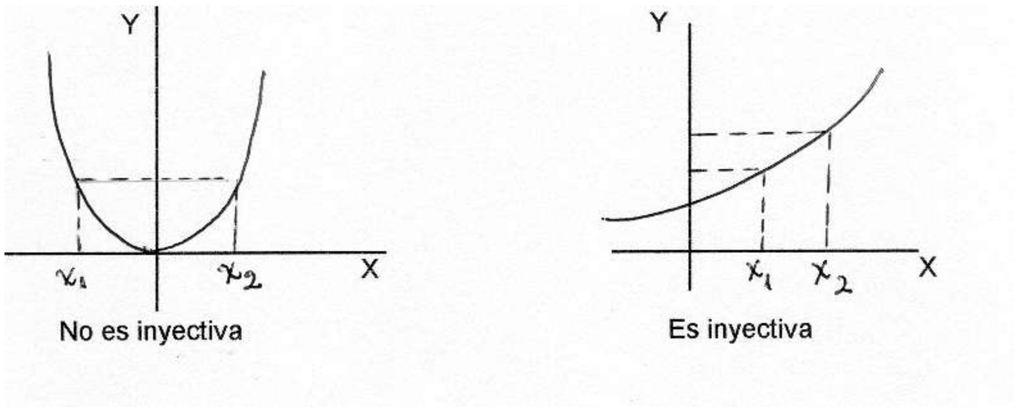
c) $q(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

d) $r(x) = (2x^2 - 4x + 2)(x^4 - x^2 - 12)$

❖ Clasificación de Funciones

<u>Función inyectiva:</u> Una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio (A) le corresponden imágenes distintas en el conjunto de llegada B.
En símbolos:
$\forall x_1, x_2 \in A: (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

o bien, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Gráficamente si una función es inyectiva cualquier recta paralela al eje x no puede interceptar al gráfico de ella en más de un punto, ya que ningún elemento del conjunto imagen puede ser imagen de más de un elemento del dominio.
Nótese que f es inyectiva⇔f es estrictamente creciente (o estrict. decreciente).



<u>Función sobreyectiva:</u> Una función $f: A \rightarrow B$es sobreyectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen preimagen en el dominio A. Dicho con otras palabras el conjunto B y el conjunto imagen de f deben coincidir.

$$\forall y \in B \; \exists x \in A / y = f(x)$$

<u>Función biyectiva:</u> Una función es biyectiva⇔es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

27) Sea la función cuya fórmula es $f(x) = x^2 - 4$.
a) Graficar.

b) Unir con flechas según corresponda:

si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f no es inyectiva ni sobreyectiva

si $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ f no es función

si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ f no es inyectiva pero es sobreyectiva

si $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ f es inyectiva pero no es sobreyectiva

c) Indicar un par de conjuntos A y B para que: $f: A \rightarrow B / f(x) = x^2 - 4$ sea función biyectiva.

28) Proponer el gráfico de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$inyectiva y no sobreyectiva.

29) Dados A= {1, 2, 3} y B={3,7}
a) Definir, si es posible, una $f: A \rightarrow B$ que sea:
a.1) Sobreyectiva a.2) Inyectiva
b) Se puede definir en estos conjuntos una función biyectiva? Explicar la respuesta
c)¿Qué condición deben cumplir dos conjuntos para que se pueda definir una función biyectiva entre ambos?

❖ Función Inversa

Se denomina **relación inversa** de una función f definida de A en B, a la que se obtiene de invertir los pares de f y se denomina f^{-1} .
Es decir dada f definida de A en B, cuya gráfica está constituída por los pares (a,b), la relación inversa de f (f^{-1}) está constituída por los pares (b,a). Esta relación queda definida de B en A y no siempre es función en dichos conjuntos.
Por ejemplo: Si A={1, 2, 3} y B={3,7} y $f: A \rightarrow B$ / *f*= {(1,3), (2,3), (3,7)}, su relación inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$, f^{-1}= {(3,1), (3,2), (7,3)} No es función de B en A.

¿Qué condiciones debe cumplir una función $f: A \rightarrow B$ para que su relación inversa sea función de B en A?
Si la función admite función inversa y existe una expresión analítica a través de una fórmula y=f(x), para hallar la expresión analítica de la inversa cambiamos x por y, e y por x (es decir invertimos los pares), y despejamos la variable ¨y¨, si es posible.

30) Dada la función f:$\mathbb{R}_0^+ \rightarrow [2, +\infty) / f(x) = x^2 + 2$. Clasificarla y hallar, si existe, su inversa.

31) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3$ .Clasificarla y hallar, si existe, su inversa. Representar.

Los gráficos de funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, o sea la recta y=x siempre que la escala utilizada en ambos ejes sea la misma.

32) Dadas las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,
- Hallar los ceros,

- Escribir los intervalos de positividad y
- Estudiar paridad.
- Graficar aproximadamente.
- Indicar conjunto imagen.
    a) $f(x) = x^3 + 2$
    b) $f(x) = (x + 2)^3$
    c) $f(x) = (x - 1)^3 + 2$
    d) $f(x) = -x^3$
    e) $f(x) = 2x^3$
    f) $f(x) = x^4$
    g) $f(x) = -x^4 + 3$

Clasificar las funciones del ejercicio 7 cuando están definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Indicar, cuando sea necesario, restricciones en los conjuntos para que sean biyectivas.
En esos conjuntos, definir las funciones inversas.

Unidad 4: Funciones racionales no enteras o fraccionarias y funciones irracionales

Expresiones y funciones racionales

La expresión $\frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, se denomina expresión algebraica racional.

Una función racional es una función que asigna imágenes a través de una expresión racional.

$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ siendo $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que $q(x)$ es de grado mayor o igual que 1 y $A = \{x / x \in \mathbb{R}\ y\ q(x) \neq 0\}$

Ejemplo de función racional:

$$f: \mathbb{R} - \{-2; 2\} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x^2 - 4}$$

Ejercicio Nº1

Hallar el dominio más amplio en $\mathbb{R}$, los ceros y representar:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{-x^2 + 9}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^3 - x^2 - 12x + 4}$

Casos particulares de funciones racionales:

a) Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio mayorante de la función sigue siendo el conjunto de los números Reales de los cuales se excluyen los puntos que anulan el denominador de la función dada.

Por ejemplo: $f: \Re - \{3\} \to \Re / f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$

Esta fracción puede simplificarse pues $x \neq 3$ f(x)=x+3. Tiene por gráfica a una **recta** de ecuación y=x+3 excluído el punto (3,6).

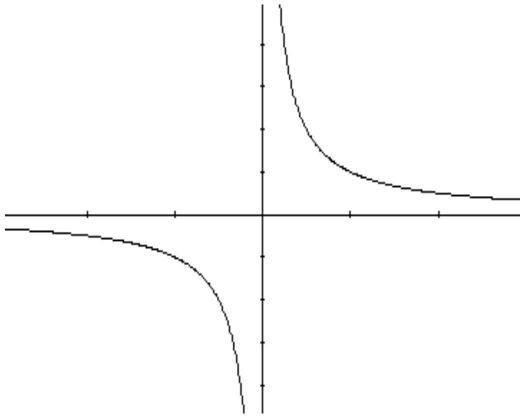
b) **Función homográfica**: $f: \Re - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \Re /\ f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $\quad c \neq 0$

La consideramos función homográfica siempre que no pueda reducirse a una función constante. ¿En qué caso se produciría esta situación?

Notemos que R no es el conjunto imagen. Hallar el conjunto imagen.

La gráfica de la función homográfica es una curva llamada **hipérbola equilátera**.

Estudio de la función homográfica



Sea la función homográfica que surge de la definición con a=0, b=1, c=1 y d=0

$$y = \frac{1}{x}$$

Conforme los valores de x están más próximos a cero, el valor absoluto de la función es cada vez mayor (se dice que el valor absoluto de f(x) tiende a infinito cuando x se acerca a cero), en símblos

$$|f(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$$

Entonces diremos que el eje y, de ecuación x=0, es asíntota vertical de la curva.

En general, diremos que la recta de ecuación x=a es una asíntota vertical de la curva gráfica de f, cuando $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} \infty$

Volviendo al gráfico, vemos que a medida que x crece en valor absoluto los valores que toma la función se acercan cada vez más a cero. $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Diremos que el eje x, de ecuación y=0, es asíntota horizontal al gráfico de f(x).

En general, diremos que la recta de ecuación y=b es una asíntota horizontal de la curva gráfica de f, cuando $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} b$

Las asíntotas (en este caso los ejes coordenados) son perpendiculares, por eso se llama hipérbola equilátera (sólo este tipo de hipérbola será objeto de estudio en este curso) y se cortan en un punto que es el centro de simetría de la curva. La hipérbola tiene 2 ramas que en este caso están situadas en el 1^er^ y 3^er^ cuadrante (recordemos que los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del semieje positivo de las x)

Si representamos f(x)= $-\frac{1}{x}$ las ramas estarían en el 2^do^ y 4^to^ cuadrante.

Conociendo la gráfica de f(x)= $\frac{1}{x}$ puede obtenerse mediante los correspondientes desplazamientos la gráfica de:

f(x)= $\frac{k}{x - x_0} + y_0$ (forma canónica)

La gráfica de esta función es una hipérbola que se obtiene de la gráfica de f(x)= $\frac{k}{x}$ desplazándola x_0 unidades en el sentido positivo de x (si x_0>0) y y_0 unidades en el sentido positivo de y (si y_0>0)

Si la función está dada en la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ puede llevarse a la forma canónica $f(x) = \frac{k}{x - x_0} + y_0$ de dos maneras:

Veamos un ejemplo:

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}$$

- **Completando los términos para simplificar y obtener la forma canónica**

$$f(x)=\frac{\frac{1}{3}(3x+3)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2+1)}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}(3x+2)}{3x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}, \textit{sacando factor comun } 3 \textit{ y operando}$$

$$\textit{con el numerador } 1/3{:}3=1/9, \text{ tenemos } f(x)=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

- **O bien, dividiendo los polinomios se obtiene cociente $\frac{1}{3}$ y resto $\frac{1}{3}$**

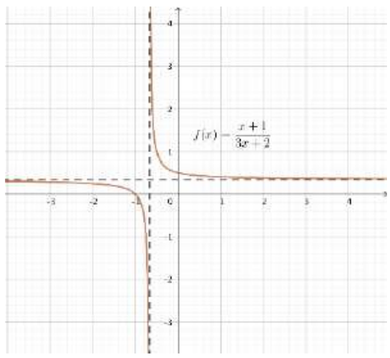
Por ser una división entera $x+1=\frac{1}{3}(3x+2)+\frac{1}{3}$

Dividiendo miembro a miembro por 3x+2

$$f(x)=\frac{x+1}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son

$av: x=-\frac{2}{3}$ $\qquad$ $ah: y=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $D_f=\Re-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ $\quad$ $I_f=\Re-\left\{\frac{1}{3}\right\}$



__Ejercicio Nº2__

Dadas las funciones, se pide: a) Determinar si son o no homográficas y, en caso afirmativo, dar la ecuación de la forma canónica; b) Ecuaciones de las asíntotas; c) Dominio e imagen d) Ceros

a) $f(x)=\frac{4x-1}{2x+3}$ $\qquad$ b) $f(x)=\frac{x-2}{5x-10}$ $\qquad$ c) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad$ d) $f(x)=\frac{2{,}5x+20}{5x+50}$

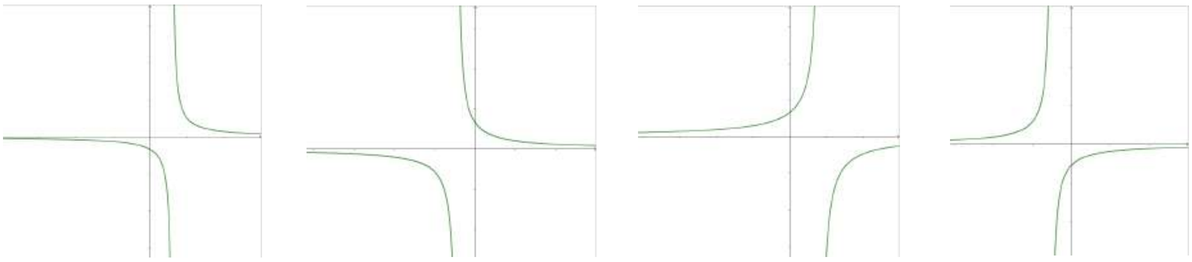
e) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{8+2x}{x}$ $\qquad$ f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad$ g) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

Ejercicio Nº3

Escribir debajo de cada gráfico la función que le corresponde

$f(x) = \frac{a}{bx+c}$ $a < 0 \wedge b > 0 \wedge c < 0$ $\quad$ $h(x) = \frac{a}{bx+c}$ $a > 0 \wedge b > 0 \wedge c < 0$

$g(x) = \frac{a}{bx+c}$ $a < 0 \wedge b < 0 \wedge c < 0$ $\quad$ $m(x) = \frac{a}{bx+c}$ $a > 0 \wedge b < 0 \wedge c < 0$



Ejercicio Nº4

Escribir una función homográfica tal que $f: R - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to R - \{2\} \wedge f(0) = -3$

Ejercicio Nº5

Dadas las siguientes funciones, se pide forma canónica, ecuaciones de las asíntotas, gráficos correspondientes, ceros, intervalos donde la función es positiva y creciente.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{5-x}$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{-2x-3}{x-1}$

Ejercicio Nº6

Calcular el valor de K para que cada función cumpla con la condición pedida

a) La asíntota vertical de $f(x) = \frac{x-2}{kx+3}$ sea $x = 2$

b) La asíntota horizontal de $j(x) = \frac{1-kx}{3x-7}$ sea $y = -\frac{1}{2}$

c) La ordenada al origen de $g(x) = \frac{x+k}{1-2x}$ sea $y = \frac{3}{4}$

d) La raíz de $a(x) = \frac{kx-5}{x-2}$ sea $x = -\frac{2}{3}$

Ejercicio Nº7

Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) La función $f(x) = \frac{1}{x+3}$ corta al eje x.

b) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ es la recta $h(x) = x - 1/ \quad h: R - \{-1\} \to R$

c) Una función racional puede no tener asíntota vertical

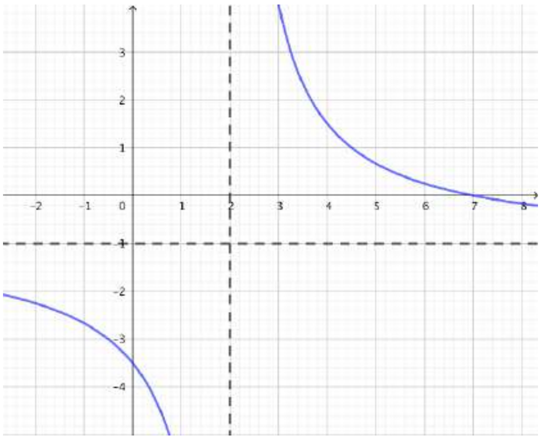
d) La asíntota horizontal de $k(x) = \frac{1}{x} + 2$ es $y = 2$

e) La asíntota horizontal de $d(x) = -(x+3)^{-1}$ es $x = 3$

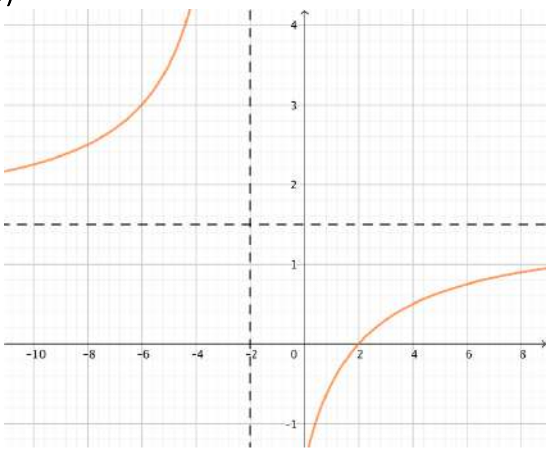
Ejercicio Nº8

Para cada uno de los siguientes gráficos de funciones homográficas, establecer la función de la forma $f(x) = \frac{k}{x+c} + d$ (donde k, c y d son números reales y k≠0) que se corresponda con cada gráfico y determinar en forma analítica la ordenada al origen y la raíz.

a)



b)



Ejercicio Nº9

Sea $f: A \to B / f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Hallar A y B mayorantes para que la función sea biyectiva. Obtener la inversa. Graficar ambas.

Ejercicio Nº10

Representar, determinar el conjunto imagen y clasificar en $\Re$. En el caso de no ser biyectiva, buscar una restricción que lo sea y hallar la inversa.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Ejercicio Nº11

Graficar:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} + 3 \right|$

c) $f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} + 3 \right|$

d) $f(x) = \left| \frac{-2}{x-2} \right| + 3$

e) $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$

Ejercicio Nº12

Hacia un tanque de agua que contiene agua pura fluye agua salada de modo tal que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t)=\dfrac{t}{10t+100}(t>0)$

Graficar c y discutir el comportamiento de la función cuando $t\to\infty$. Interpretar

Ejercicio Nº13

Se estudian muestras de 10 gramos de suelo y se trata de determinar el contenido de humedad w (en porcentaje) en función de la masa seca s (en gramos) del suelo a partir de la función: $w(s)=100\frac{10-s}{s}$

a. Calcular el contenido de humedad del suelo cuando s=7,9gr; s=9,5gr; s=10gr.

b. ¿Cuál será la masa seca cuando w=100; w=50; w=0,5?

c. Determinar cuál es el dominio y la imagen de esta función en el contexto del problema

d. Realizar un gráfico aproximado en el contexto del problema

Ejercicio Nº14

Se desea envasar 120 litros de aceite en botellas de igual capacidad. La cantidad de botellas que se necesitarán depende de la capacidad de cada botella. Les proponemos completar la siguiente tabla:

Capacidad de c/botella (l)	Cant. total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	
2		
3		
5		
1/2		
3/2		

Hallar una función que permita conocer la cantidad de botellas que se necesitan conociendo la capacidad de cada una de ellas.

Operatoria con expresiones racionales

Ejercicio Nº15

Reducir a su mínima expresión haciendo las restricciones necesarias:

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x^3+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

d) $\left(\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+3}\right).\dfrac{x^2-x+3(x-1)}{25x^2-81}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^3}{8}-1}{\dfrac{x^2}{4}-1}:(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)$

e) $\dfrac{x^2-21x-7}{7-x}:\left(\dfrac{4x+1}{7+x}+\dfrac{2x+1}{7-x}\right)$

c) $\left(x+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+2x}\right)$

f) $\dfrac{\left(-\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{1-x}\right).\left(\dfrac{2(1-x)^2}{x^2+4x+4}+\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right)}{\dfrac{x}{4-x^2}}$

Ejercicio Nº16

Hallar uma expresión “simplificada” equivalente a $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Ejercicio Nº17

Hallar A y B para que:

a) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{3x-1}{x^2+x-2}$

b) $\dfrac{2A}{2x-1}-\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{2x+13}{2x^2+5x-3}$

Ejercicio Nº18

(Optativo) Descomponer en fracciones simples:

a) $\dfrac{x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x+2}$

d) $\dfrac{x^5-1}{x^2+x}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con expresiones racionales

Ejercicio Nº19

Resolver las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta en cada caso el dominio de definición.

a) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

b) $\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-3}$

c) $\dfrac{x-6}{x+4}+\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{13x-48}{x^2+6x+8}$

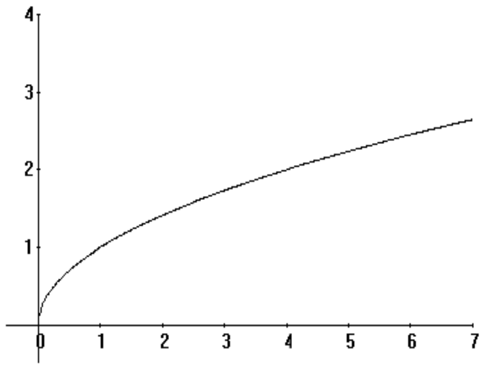
<u>Ejercicio Nº20</u>

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analítica y gráficamente:

a) $\begin{cases} y=\dfrac{x+3}{x-1} \\ y=x-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=\dfrac{2x+4}{x+3} \\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x+1} \\ y=-1 \end{cases}$

<u>Funciones cuyas fórmulas contienen expresiones irracionales</u>

a) $f: {}_0^+ \to \quad / \, f(x)=\sqrt{x}$, $I_f = {}_0^+$ ceros: x=0. Es estrictamente creciente.



<u>Ejercicio Nº21</u>

Teniendo en cuenta la gráfica de $f: A \to \quad (A \subset \quad) /$ f(x)= $\sqrt{x}$ y mediante simetrías y/o desplazamientos.

Graficar:

a) $f(x)=-\sqrt{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x-1}$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$

En todos los casos obtener: dominio máximo, ceros, conjunto imagen. Analizar si son biyectivas y obtener las funciones inversas (si es necesario restringir).

Ejercicio Nº22

Dada $f: A \to \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{1-x^2}$ se pide: a) Dominio máximo, b) Conjunto imagen, c) Ceros, d) Gráfica, e) Clasifique, f) Buscar una restricción biyectiva, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº23

Sea $f: A \to \mathbb{R}/f(x) = \sqrt{|x|+1}$ se pide:

a) Dominio máximo, b) conjunto imagen, c) ceros, d) gráfico, e) clasificación, f) intervalo en que la función es positiva y creciente simultáneamente, g) si no es biyectiva buscar una restricción que lo sea, hallar la inversa y graficar en el mismo sistema que f.

Ejercicio Nº24

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Clasificar. Hallar la inversa (si es necesario restringir). Graficar ambas.

Ejercicio Nº25

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & si\ x \geq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & si\ x < 2 \end{cases}$$

Se pide: representar, conjunto imagen, ceros, clasificar, inversa (si es necesario buscar una restricción).

Ejercicio Nº26

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, teniendo en cuenta las restricciones:

a) $\sqrt{1-x} = \sqrt{x^2-5}$

b) $x+2 = 13-\sqrt{x-5}$

c) $\sqrt{x^2-5}+7 = x^2$

d) $x^2+\sqrt{x^2+9} = 21$

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{8x+1} = 0$

Unidad 5: <u>Álgebra de funciones</u>

IGUALDAD

Dos funciones f:Df → B y Dg → C son iguales cuando:
Df = Dg ; B = C y para todo x: f(x) = g(x)
Por ejemplo:

Las funciones $f: R-\{2\} \rightarrow R \,/\, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y g: R→R/ g (x) = x+2

no son iguales ya que $D_f \neq D_g$, sin embargo, notemos que para todo x≠2, f(x) = g(x). Es decir, sus gráficas serán iguales salvo en el punto de abscisa 2 en el cual f no está definida y tiene un "agujero" y sin embargo g(2) = 4

Si definimos una función h: R→R/ $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 4 & si\, x=2\end{cases}$, resulta h = g

SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Se pueden definir operaciones entre funciones que llamaremos suma, producto y cociente de la siguiente manera:

f+g(x) = f(x)+g(x) para todo x , siendo D(f+g) = Df ∩ Dg

f.g(x) = f(x).g(x) para todo x , siendo D(f.g) = Df ∩ Dg

$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ para todo x, siendo $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in \quad / g(x) \neq 0\}$

Ejemplo :

Sean f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ D_f = R-{1} y g(x)= $\sqrt{x}$ D_g= $\;^{+}_{0}$ entonces,

$(f+g)(x)=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x}$ $\qquad D_{f+g} = \;^{+}_{0}-\{1\}$

$(f.g)(x)=\dfrac{1}{x-1}.\sqrt{x}$ $\qquad D_{f.g} = \;^{+}_{0}-\{1\}$

$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{1}{(x-1).\sqrt{x}}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \;^{+}-\{1\}$

COMPOSICION DE FUNCIONES

Analicemos la siguiente situación:
Cuando una piedra cae al agua se generan círculos que van creciendo en función del tiempo en forma concéntrica.
El área del círculo depende del radio. A su vez el radio aumenta al transcurrir el tiempo, supongamos que lo hace según la función

$r(t) = 3t$, resulta:

$A(r) = \pi.r^2$ con $r(t)=3t$

El área del círculo, depende entonces del tiempo a través de la función $A(r(t))= \pi.(3t)^2$

Definición:
Dadas dos funciones $f:Df \to If$ y $g:Dg \to Ig$ y tales que $If \subset Dg$, llamamos función compuesta g sobre f, a $gof:Df \to Ig$ / para todo x , $gof(x) = g[f(x)]$

Observaciones:

* La imagen de f debe estar incluída en el dominio de g para que todos los elementos de Df tengan imagen a través de la función compuesta gof.

* La imagen de g es, en general, el codominio (conjunto de llegada) de la compuesta y no su conjunto imagen, ya que puede haber elementos en el dominio de g que no sean imagen de ningún elemento de Df (si la inclusión es estricta)

* Si la inclusión pedida en la definición no se verifica, pueden hacerse las restricciones necesarias para la composición.

Veamos un ejemplo para aclarar estos puntos:

Sean

$f(x) = 2x+1$ y $g(x)= \frac{1}{x-1}$

Df=R If=R

Dg=R-{1} Ig=R-{0}

Para realizar la composición gof debemos verificar que la imagen de la primer función a aplicar (f) esté incluída en el dominio de la segunda función a aplicar (g) .

Esto no se verifica, entonces realizamos la siguiente restricción:

Como necesitamos que 1 no pertenezca a If, para eliminarlo, restringimos Df.
Vemos que 2x+1=1 cuando x=0. Bastará entonces tomar como Df * =R-{0}, luego la Imagen correspondiente será If=R-{1} que coincide (y por lo tanto está incluída) en Dg.

A pesar de que, hechas las restricciones las funciones no son las mismas, usaremos por comodidad las mismas letras para nombrarlas.

Ahora; gof:R-{0} → R-{0} / gof(x) = g[f(x)] = g[2x+1]= $\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$

Para hallar fog, debemos analizar si el Ig está incluída en el Df.

Como R-{0} ⊂ R, podemos realizar la composición:

fog:R-{1}→ R / fog(x) = f[g(x)]= $f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2.\frac{1}{x-1}+1=\frac{1+x}{x-1}$

Notemos que como la inclusión es estricta, el conjunto R es el codominio (conjunto de llegada) y no la imagen de la función compuesta fog

Como vemos, fog ≠ gof. La composición de funciones *no es una operación conmutativa*. Puede demostrarse que la composición de funciones *es asociativa*.

<u>Composición de funciones inversas</u>:

Sean las funciones biyectivas f:A → B y f^{-1}:B → A
a través de f a cada x de A le corresponde un y de B
a través de f^{-1} a cada y de B le corresponde un x de A
O sea f^{-1} (f(x))= x que se denomina función identidad y está definida de A en A

Análogamente, si aplicamos primero f^{-1}, diremos:
a través de f^{-1} a cada x de B le corresponde un y de A
a través de f a cada y de A le corresponde un x de B

Entonces; f(f^{-1}(x)) = x que es la identidad, pero ahora definida de B en B.

Las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto de la recta y=x
(gráfica de la función identidad).

Ejercicios

1) Dados los siguientes pares de funciones f y g indicar para cada una, dominio mayorante e imagen y hallar f+g, f.g y f/g indicando el dominio mayorante de cada una.

a) f(x)= x^2 g(x)= 2x-1
b) f(x) = x^2 g(x) = $\sqrt{x}$
c) f(x) = $\frac{1}{x-2}$ g(x) = 3x+2

2) Dadas f(x)= $\sqrt{x}$ y g(x)= $x^2 - 1$, hallar:
a) f(g(1)) b) g(f(1)) c)g(f(2)) d) f(g(2)) e) fog f) gof

3) Dados los pares de funciones del ejercicio 1, hallar fog y gof haciendo restricciones a los conjuntos si fuese necesario

4) Dada fog: R→R / fog(x)= $x^3 + 3x^2+3x +2$.

Hallar g, siendo f: R $\rightarrow$ R/ f(x)= 2x-1.

5) Un globo esférico elástico, que desinflado tiene un metro de radio, se infla aumentando su radio 0.1 m cada segundo.
a) Escribir la función de medida del radio respecto del tiempo.
b) Sabiendo que la función de medida del volumen respecto del radio para la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi.r^3$, hallar la función de medida del volumen respecto del tiempo. Calcular el volumen para t=3

6) Dadas las siguientes funciones, indicar dominio e imagen, buscar su inversa (restringiendo si es necesario para la biyectividad) y componer para obtener la identidad. Indicar en todos los casos, dominios e imágenes.
a) $f(x) = x^2+2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

7) (Optativo) Indicar si es V o F, expresando un argumento que justifique la respuesta.
a) La composición de funciones inyectivas, es inyectiva.
b) La composición de funciones sobreyectivas, es sobreyectiva.

Respuestas

UNIDAD 1

1) a) Si.
   b) 34,5 kg.
   d) ii, iv, v
   e) el último gráfico

Volumen de aceite (en litros)	Peso del barril con el aceite (en kg)
0	30
7,5	34,5
10	36
15	39
17,5	40,5
20	42
22	43,2
30	48
42,5	55,5
46	57,6

2) a) Si. b) 12 cm. c) 15 cm; 14,9 cm.
   d) Cada 10 min se consume 1 cm. Por lo tanto tardará 150 minutos en consumirse
   e) 8,7 cm. f) $A(t) = 15 - 0{,}1t$

3) a) 1. F 2. V 3. V

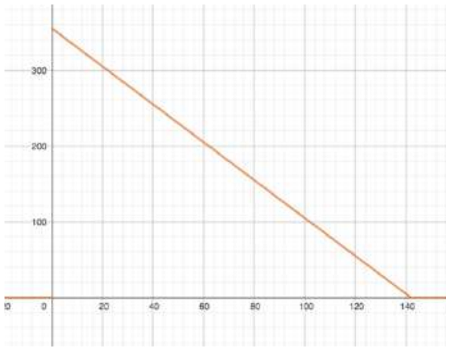
Tiempo de funcionamiento de la bomba (en minutos)	0	6	11,5	12	14,5	19,5	20,8
Cantidad de agua que hay en el tanque (en litros)	4200	3300	2475	2400	2025	1275	1080

c) $V(t) = -150t + 4200$ e) El punto (13;2100) no representa el volumen en el tiempo indicado. Puede cambiarse por (13;2250) o (14;2100)
f) f_1: Al prender la bomba había 4200 litros
   f_2: V(0) f_3: 28 minutos. Es el lugar donde la gráfica corta al eje t
   f_4: V(t)=0 f_5: 12 minutos

4)
   b) $C(t) = 2{,}5t + 45$ Dom [0;142] Im [45;400]

Tiempo (en minutos)	**Cantidad de agua en la pecera (en litros)**
10	70
30	120
40	145
55	182,5
81	247,5
100	295
120	345
142	400

c)



d)
$R(t) = -2{,}5t + 355$

Dominio: [0;142]

Imagen: [0;355]

5) a) La altura de cada una de las velas en función del tiempo.
c) Vela 1: $A_1(t) = -\frac{1}{2}t + 30$ Vela 2: $A_2(t) = -\frac{3}{10}t + 18$ d) 20 min

6) a) Sabemos que al momento de abrir la canilla 1, la pecera tiene 40 litros de agua. También podemos saber cuál es la capacidad de la pecera: 240 litros.
b) 112,5 litros c) 96 minutos d) $C_1(t) = 2{,}5t + 40$

7) a)

Tiempo (minutos)	Altura de la vela 1 (cm)	Altura de la vela 2 (cm)
0	60	
5	36	
10	12	9
12,5	0	0

b)$V_2(t) = -3{,}6t +$
45

Consumo (Kwh)	Empresa A Importe ($)	Empresa B Importe($)
82	260	266,6
100	305	308
190	530	515
240	655	630

8)

b) Si se consumen menos de 115Kwh es más conveniente la empresa A

9) a) 24 cm b) 48 min c) $A_2(t) = -0{,}5t + 24$ Dominio: [0;48]. Imagen: [0;24]
d) Si. e) 24 min

10) a) 4 b) 12 cm c) A los 26 min. La altura es 21,6 cm d) A los 16 y a los 36 minutos

11) a)

Tiempo (minutos)	Altura de agua en el tanque 1 (centímetros)
0	208
1	204,8
5	192
41,5	75,2
64	3,2
65	0

Tiempo (minutos)	Altura de agua en el tanque 2 (centímetros)
0	180
1	177,5
5	167,5
72	0

b) A los 40 min tienen la misma altura: 80 cm

c) A los 25 min y a los 55 min.

12) a_1)

x	y
-1	-1
0	2
1	5
2	8
3	11
7	23
127	383

a_2) $y = 3(x-1)+5$ $\quad$ $y = 3(x-3)+11$

b)

x	y
-4	2
-2	3
0	4
0,5	4,25
2	5
4	6
120	64
123,4	65,7

13) a) (–4; 6) (0; 5) (4 ; 4) (8;3) (3; 4,25) (120; -25) (20 ;0)

b) (0; -5) (1;-2) (2 ;1) (3 ; 4) (120; 355) (5/3 ; 0) (47/3 ; 42)

c) (-2;2) (0 ;-1) (2; -4) (1; -2,5) (12; -19) (-2/3 ;0) (-10 ; 14)

d) (1;7,5) (3;10,5) (-5;13,5) (34;57) (-24;-30)

e) (0;5) (3; -2,5) (14;-30) (12 ;-25)

14)

Problema		Variable independiente	Variable dependiente	Pendiente de la recta	Significado de la pendiente en el contexto del problema	Ordenada al origen	Significado de la ordenada al origen en el problema	Raíz de la recta	Significado de la raíz en el contexto del problema	Fórmula
Problema del barril (ejercicio 1)		Cantidad de aceite en el barril (litros)	Peso del barril con aceite (Kg)	0,6	El peso que marca la balanza aumenta 0,6 Kg por cada litro de aceite que se agrega al barril.	30	Peso del barril vacío	No tiene	————————	P = 0,6.x +30
Problema de las velas (ejercicio 9)	Vela 1	tiempo	altura de la vela 1	-1,5	La altura de la vela 1 disminuye 1,5 cm por cada minuto	42	Altura de la vela 1 al momento de encenderla	50	Instante en el que la vela 1 se derritió completamente	$A_1(t) = -1{,}5t + 42$
	Vela 2	tiempo	altura de la vela 2	–0,5	La altura de la vela 2 disminuye 0,5 cm por cada minuto	24	Altura de la vela 2 al momento de encenderla	48	Instante en el que la vela 2 se derritió completamente	$A_2(t) = -0{,}5t + 24$
Problema 12 a		x	y	3	Cuando ‘x’ aumenta una unidad, ‘y’ aumenta 3 unidades.	2	El valor que toma y cuando x=0	-2/3	El valor que debe tomar x para que y valga 0	
Problema 13 a		x	y	-0,25	cuando x aumenta una unidad, y disminuye 0,25 unidades	5	El valor que toma ‘y’, en este caso y=5, cuando x = 0	20	El valor que debe tomar x para que y valga 0	

EN LA TABLA QUE APARECE EN LA GUÍA ESTÁN MAL LOS DATOS DE LA PENDIENTE DE LA RECTA DE LA VELA 2 Y LA ORDENADA AL ORIGEN DE LA VELA 1

15)

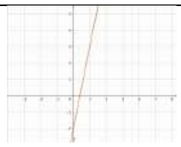
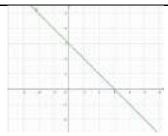
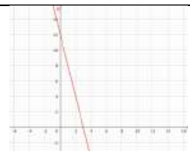
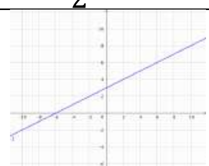
	Pendiente	Ordenada al Origen
a	2/3	1/3
b	-4	44
c	0	-3

16) Gráfico 1: No. La pendiente de la recta graficada es 6 y no 3.
Gráfico 2: No. La ordenada al origen no es 6
Gráfico 3: No. La ordenada al origen de la recta graficada es menor a 0
Gráfico 4: No puede asegurarse ya que no tenemos la escala utilizada para el eje y
Gráfico 5: No. La recta graficada es decreciente, no puede tener pendiente 3
Gráfico 6: Si. La ordenada al irguen es 6 y si aumenta una unidad el valor de x, la ordenada aumenta 3.

17)

FUNCIÓN	f	g	h	i	j	m
GRÁFICO	4	2	1	6	5	3
RAÍZ	5	-13/2	-2/3	-4	10/3	5
PENDIENTE	2	-2	3	-1	3	-2
O. AL ORIGEN	-10	-13	2	-4	-10	10

18)

FUNCIÓN	$f(x) = 5x - 2$	$g(x) = -x + 3$	$h(x) = -4(x - 3)$	$j(x) = \frac{1}{2}(x + 6)$
GRÁFICO				
PENDIENTE	5	-1	-4	½
O.AL ORIGEN	-2	3	12	3
RAÍZ	2/5	3	3	-6

19) a) No están alineados. b) B=(3,5;1,25)

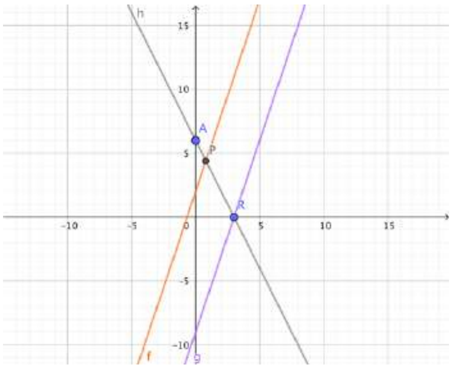
20) a) No están alineados. B=(6;-5) b) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$

21) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

22) a) F. b) F. c) V d) V e) V. f) V g) V

23) a) No b) No

24) a) $y = 3x - 16$ b) $y = 6x - 24$

25)  a) b) $P = \left(\frac{4}{5}; \frac{22}{5}\right)$

27) a) No. b) Si c) No se puede asegurar

29) $y = x + 5$

30) a) $P = \left(\frac{24}{13}; \frac{36}{13}\right)$ b) $P = (5; 0)$

31) $r: y = \frac{1}{2}x + 4;$ $r': y = -2x$ Área del triángulo: $\frac{64}{5}$

32) Lado AB: 4 cm Lado BC: 2,4 cm

33) $r_1: y = -2x + \frac{3}{2}$ $r_2: y = 2x + \frac{3}{2}$ $r_3: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$ $P = \left(-\frac{3}{4}; -1\right)$

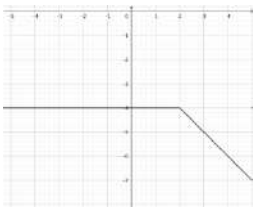
34) $\frac{1}{4}$ 35) $\left(5; \frac{5}{2}\right)$ 36) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{31}{5}\right)$

37) $r_1: y = \frac{4}{3}x + 4;$ $r_2: y = -\frac{3}{4}x + 4$

38) 

Im: [8,5;+∞) U {4}

Ceros: {}

39) 

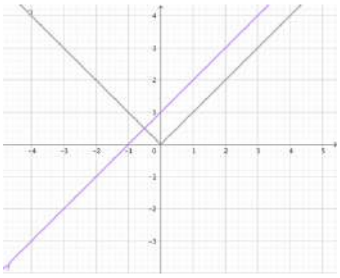
Im: (-∞;-4]

Ceros: {}

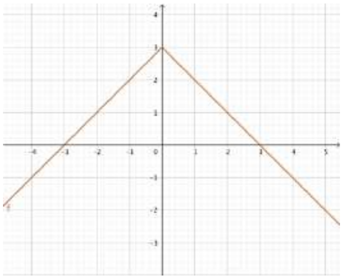
40) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{7}x - 6 & si\ x < 0 \\ \frac{2}{5}x - 6 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ Ceros: {-7;15}

41) Im: [0,+ ∞) f es una función par

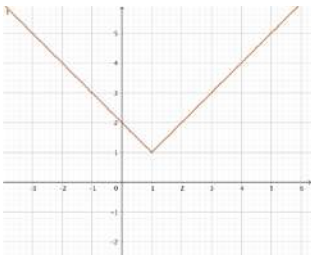
42)



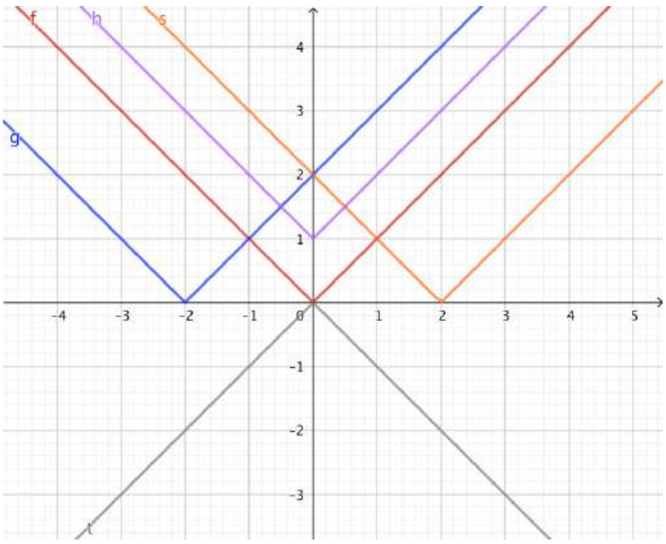
43) a)



b)



44)



UNIDAD 2
PRIMERA PARTE

1) a) \$10800 b) Por ej: \$200 c) \$22050 cobrando \$250 la hora d) \$325

2) a) $T(2) = -2{,}4^oC$ b) A la 1am c) No e) $-1{,}5^oC$ a las 3 y a las 13; -5^oC nunca
f) -4^oC a las 8hs

3) -1 a) x=7 b) No existen c) $x = 6;\ x = -2.$ d) Ninguno e) sólo x=2 g) último gráfico

4)

FUNCIÓN	$f(x) = (x+5)^2 - 4$	$g(x) = -2(x-5)^2 + 1$	$h(x) = 5 - (4x+3)^2$	$i(x) = (7x-5)^2 + 18$
MÁX/MÍN	Mín: -4	Máx: 1	Máx: 5	Mín:18
VALOR DE x	$x = -5$	$x = 5$	$x = -\frac{3}{4}$	$x = \frac{5}{7}$

6)

Gráfico	Vértice	A	B	C	D	E	F
a	(1;8)	$\left(0;\frac{15}{2}\right)$	$\left(2;\frac{15}{2}\right)$	$\left(-2;\frac{7}{2}\right)$	$\left(4;\frac{7}{2}\right)$	(-3;0)	(5;0)
b	(4;-9)	(0;7)	(8;7)	(3;-8)	(5;-8)	(1;0)	(7;0)

7) a) (-54;56) (-60;0) b) (30;35) (24;20) c) (6;3,5) (7;0)

9)

	C^+	C^-	Im	Crecimiento	Decrecimiento
i	(-3;13)	$(-\infty;-3)U(13;+\infty)$	$(-\infty;16]$	$(-\infty;5)$	(5;+ ∞)
ii	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;-4)$
iii	$\emptyset$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R}^-{}_0$	$(-\infty;1)$	$(1;+\infty)$

10) a)

	C^+	C^-	Im	Crecimiento	Decrecimiento
$f(x) = -(x+2)^2 + 9$	(-5;1)	$(-\infty;-5)U(1;+\infty)$	$(-\infty;9]$	$(-\infty;-2)$	$(-2;+\infty)$
$g(x) = 4(x-3)^2 - 1$	$(-\infty;2{,}5)U(3{,}5;+\infty)$	(2,5:3,5)	$[-1;+\infty)$	$(3;+\infty)$	$(-\infty;3)$
$h(x) = -2(3x-1)^2 - \frac{1}{2}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
$i(x) = -2(x+3)^2$	$\emptyset$	$\mathbb{R} - \{-3\}$	$\mathbb{R}^-{}_0$	$(-\infty;-3)$	$(-3;+\infty)$
$j(x) = x^2$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}^+{}_0$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$

b) $f(x) = 8 - \frac{1}{2}(x+7)^2$ Conj. Negatividad: $(-\infty;-11)U(-3;+\infty)$ Imagen: $(-\infty;8]$

c) $g(x) = -8 + \frac{1}{8}(x-1)^2$ Conj. Positividad: $(-\infty; -7)U(9; +\infty)$ Imagen: $[-8; +\infty)$
d) $h(x) = a(x-7)^2$ Existen infinitas posibilidades
e) $i(x) = 12 - \frac{1}{3}(x+2)^2$ Conj. Positividad: (-8;4) Conj. Negatividad: $(-\infty; -8)U(4; +\infty)$
f) La fórmula corresponde a la función f. $g(x) = \frac{1}{36}x^2 - 9$
g) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$ Conj. Positividad: (-7;1). Conj. Negatividad: $(-\infty; -7)U(1; +\infty)$
h) La fórmula corresponde a la parábola que no pasa por (0;0). La ecuación de dicha parábola es $y = -\frac{8}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$
i) $y = 3(x-1)^2 + 2$
j) $y = 2(x-3)^2 - 18$

SEGUNDA PARTE

1) a, c, f

2) a) I, II, IV, V
b) b_1) en la primera que aparece en el enunciado
b_2) II
b_3) En IV que la imagen del 0 y del 2 valen 4; en V que la imagen del 6 y del -4 valen -8

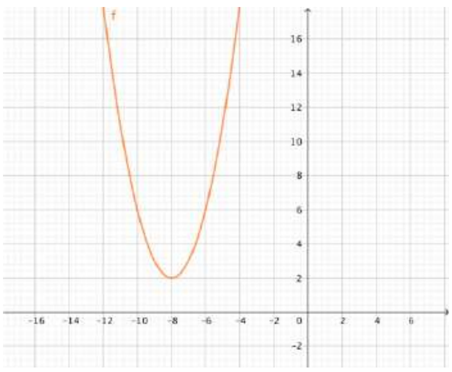
3)

f	g	h	j	k	m	n	p
Máx 32	Mín -18	Máx -110,25	Mín -8	Mín -222	Máx 80	Mín 65	Mín 0

4)

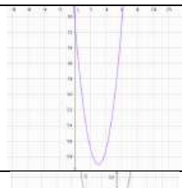
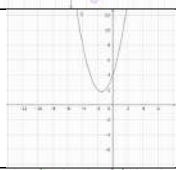
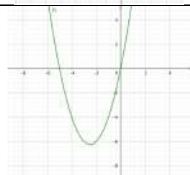
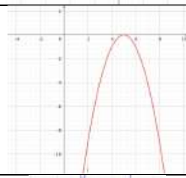
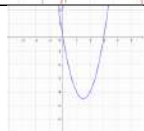
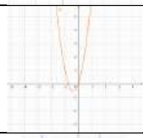
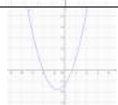
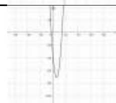
	a	b	c	d	e
Vértice f	(-1;-2)	(2;-2)	(2;-4)	(3;-8)	(2;-1)
Vértice g	(-1;-2)	(2;-2)	(2;-9)	(3;-8)	(2;-1)

5)



6) A. a) 18,75 m b) 15 m c) Altura máxima: 20 m luego de 1 seg de lanzada
B. a) 4 seg b) Si c) 18,75 m d) 15 m de altura

7)

FUNCIÓN	MÁX/MÍN	VÉRTICE	GRÁFICO
$f(x) = -2(x-7)(x+1) - 3$	Máx 29	(3;29)	
$g(x) = x(x+3) + 4$	Mín $\frac{7}{4}$	$\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right)$	
$h(x) = x^2 + 5x$	Mín $-\frac{25}{4}$	$\left(-\frac{5}{2};-\frac{25}{4}\right)$	
$i(x) = -x^2 + 10x - 25$	Máx 0	(5;0)	
$j(x) = 2x^2 - 6x$	Mín $-\frac{9}{2}$	$\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$	
$k(x) = 4x^2 + 3x$	Mín $-\frac{9}{16}$	$\left(-\frac{3}{8};-\frac{9}{16}\right)$	
$l(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$	Mín $-\frac{16}{9}$	$\left(-\frac{2}{3};-\frac{16}{9}\right)$	
$m(x) = x^2 - 12x - 35$	Mín -71	$(6;-71)$	

8) a) $f(x) = ax(x+4)$

b) Por ejemplo: $y = (x-3)(x+7)$ $\quad$ $y = -2(x-3)(x+7)$

c) $f(x) = -2x(x-4)$

d) $f(x) = (x+2)^2 + 4$. No es única, por ejemplo $g(x) = -4(x+2)^2 + 16$ también verifica lo pedido

e) $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8$

9) a) $C^o{}_f = \{-8; 2\}$ $\quad$ $C^o{}_g = \{-2; 6\}$

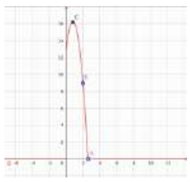
b) $f(x) = 4(x-2)(x+8)$ $\quad$ $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$

10)

	$m(x) = -4(x-2)(x-4)+12$	$h(x) = 3x^2+18x-21$	$g(x) = -x^2-2x$	$f(x) = -2x^2-4x-2$	$j(x) = 3x^2+5$
CEROS	{1;5}	{-7;1}	{0;-2}	{-1}	Ø
FACTORIZ	$-4(x-1)(x-5)$	$3(x+7)(x-1)$	$-x(x+2)$	$-2(x+1)^2$	------
C^+	(1;5)	$(-\infty;-7)U(1;+\infty)$	(-2;0)	Ø	$\mathbb{R}$
C^-	$(-\infty;1)U(5;+\infty)$	(-7;1)	$(-\infty;-2)U(0;+\infty)$	$\mathbb{R}-\{-1\}$	Ø
IMAGEN	(-∞; 16]	[-48;+ ∞)	(-∞; 1]	(-∞; 0]	[5;+ ∞)

TERCERA PARTE

6) a) 2,6 seg b) 2 seg c)



7) $A = (2;-10)$

8) a) Recta: $y = -4x + 54$ Párabola: $y = 2(x-6)^2$ b) P=(9;18)

9) a) $P_1(t) = -2(t-4)^2 + 12{,}5$ b) $P_2(4) = 0{,}5$ Gana medio millón de pesos
c) Productor 1: 1,5 toneladas Productor 2: 3,75 toneladas d) 6 toneladas

12) a) V b) F c) F

13) a) $b = \sqrt{12}\ o\ b = -\sqrt{12}$ b) $-\sqrt{12} < b < \sqrt{12}$

14) Recta: $y = -4x + 22$ Intersección: (5;2)

UNIDAD 3

1. Son polinomios: a) d) e) g) h) i)

2.

Polinomio	Ordenado y completo	Grado	CP	TI
a	$x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + \frac{1}{2}$	4	1	$\frac{1}{2}$
b	$x - 1$	1	1	-1

c	-3	0	-3	-3
d	0	No tiene	X	0
e	$-\frac{3}{4}x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$	5	$-\frac{3}{4}$	0
f	$\sqrt{2}x^2 + 0x - \sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$
g	$\sqrt{2}x^2 + 0x + \sqrt{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
h	$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. **a)** a=-1 b=-1 c=0 **b)** a=15/4 b=2 c=3/4

4. a)
- i. $h(0) = 2$ v. $h(-2) = 3$
- ii. $h(2) = -3$ vi. $h(4) = 0$
- iii. $h(6) = 7$ vii. $h(-8) = 42$
- iv. $h(3) = -2$ viii. $h(4{,}5) = 11/8$

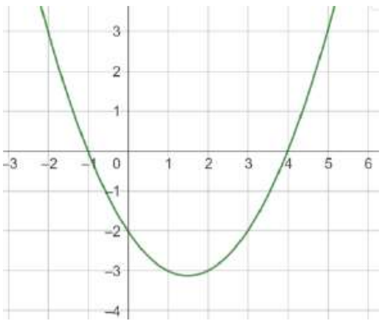
b) Decidir si $h(x)$ es negativa, positiva o cero:
- i. $h(-10) = positiva$ iv. $h(5) = cero$
- ii. $h(-20) = positiva$ v. $h(-2{,}5) = positiva$
- iii. $h(-1) = cero$

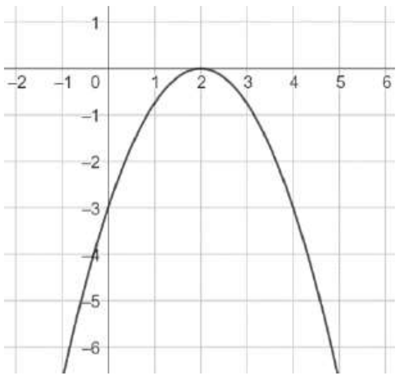
c) $h(-15)$=133.

d) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

5. a) $C^+ = \emptyset$, $C^- = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ y $C^0 = \{2\}$

b)





c) Forma factorizada: $h(x) = -\frac{3}{4} \cdot (x-2)^2$

Forma general: $h(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3$

6. a) Sí.
b) Los ceros coinciden con los ceros de ambas rectas.
Para obtener el conjunto de positividad y negatividad debemos multiplicar los signos de las imágenes de las funciones lineales entre los intervalos determinados por los ceros de las funciones.
c) No, si la parábola no tiene raíces reales no será posible.
d) Una recta debe ser creciente y la otra decreciente.
e) Ambas rectas deben tener la misma raíz. Ambas rectas deben tener distintas raíces.

7. a) $f(x) = -4x + 6$ b) No es posible.

8. a) Cociente: $-2x^2 + 1$ Resto: $2x^2 - x + 3$
b) Cociente: $x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ Resto: $-\frac{1}{4}x + 1$
c) Cociente: $x^2 - x$ Resto: 1

9. a) Cociente: $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 20$ Resto: 41
b) Cociente: $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ Resto: 1

c) Cociente: $x^2 - 2x + 4$ Resto: $m^3 - 8$

d) Cociente: $16x^3 - 16x^2 + 16x - 16$ Resto: 17

e) Cociente: $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{23}{16}$ Resto: $\frac{41}{32}$

f) Cociente: $mx^3 + m^2x^2 + m^3x + m^4$ Resto: 0

g) Cociente: $x - 9$ Resto: 0

10. a) $m = 2$
b) $m = -5/3$
c) $m = 3 \quad o \quad m = -\frac{3}{2}$

11. $m_1 = \sqrt{2}/2 \qquad m_2 = -\sqrt{2}/2$

12. **a)** a=0 **b)** a= -12 c) a = -1
13. $2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 6$

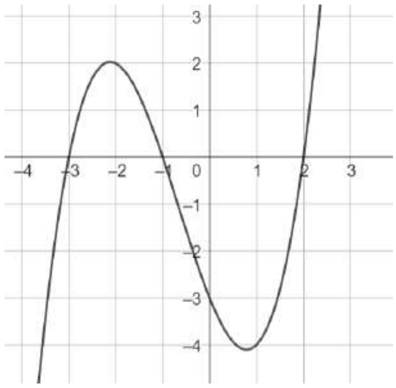
14.
a)
i. $h(1) = -4$ iv. $h(-2) = 2$
ii. $h(0) = -3$ v. $h(3) = 12$
iii. $h(-3) = 0$ vi. $h(-4) = -9$
b) Decidir si h es positiva, negativa o cero en cada caso:
i. $h(6) = positiva$ iv. $h(0) = negativa$
ii. $h(1,5) = negativa$ v. $h(-2,5) = positiva$

iii. $h(-4) = negativa$ vi. $h(-20) = negativa$

c) $C^+ = (-3;-1) \cup (2;+\infty)$, $C^- = (-\infty;-3) \cup (-1;+2)$ y $C^0 = \{-3;-1;2\}$

d) Forma factorizada: $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-2)$

Forma general: $h(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x - 3$



15. a) $h(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2(x-1)$

b) $h(x) = \frac{4}{3}(x+3)(x-1)(x-3)$

c) $h(x) = \frac{2}{3}(x-3)(x^2+4x+5)$

d) $h(x) = 3(x-2)^3$

e) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-4)$

16. $f(x) = 1 \cdot (x+3)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2$. No es la única posibilidad, lo importante es que -3 y 2 sean raíces de multiplicidad par y 1 sea raíz de multiplicidad impar. Una vez definida la multiplicidad de cada raíz hay que hallar el valor del coeficiente principal correspondiente.

17. a) Por ejemplo, $h(x) = 2 \cdot (x+5)(x+2)(x-4)$. No es única.

b) $h(x) = 1/4 \cdot (x+3)(x-2)(x-8)$ Única

c) Por ejemplo, $h(x) = 5x^2(x+1)$. No es única.

d) Por ejemplo, $f(x) = (x-7)^3$ o $f(x) = (x-7) \cdot (x^2+1)$ No es única.

e) Por ejemplo, $f(x) = (x-7) \cdot (x^2+1)$ No es única.

f) Por ejemplo, $f(x) = (x+5)^2(x-3)$ No es única.

g) No es posible.

h) No es posible ya que una función cúbica no puede tener 4 raíces.

i) No es posible. Las funciones de grado impar siempre tienen alguna raíz real simple.

18. a) No es posible.

b) Si es posible. $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$.

c) Por ejemplo, $h(x) = (x-1)(-2x+6)(x+2)$

19. a)

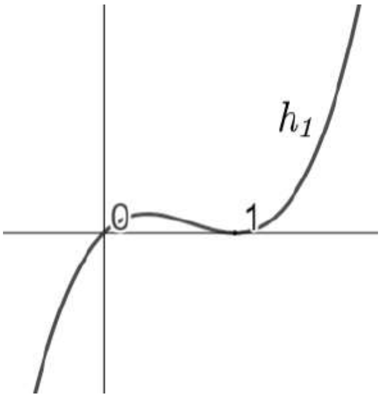
$h_1(x) = (x-1)(x^2-x)$
$h_2(x) = (x-1)(-2x^2+8)$
$h_3(x) = (x-1)(2x^2+8)$
$h_4(x) = (x-1)(-x^2+3x-2)$

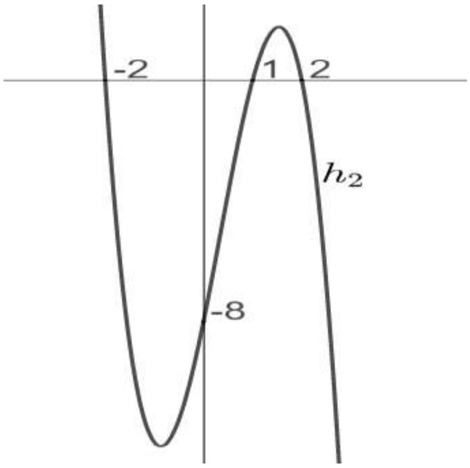
b)

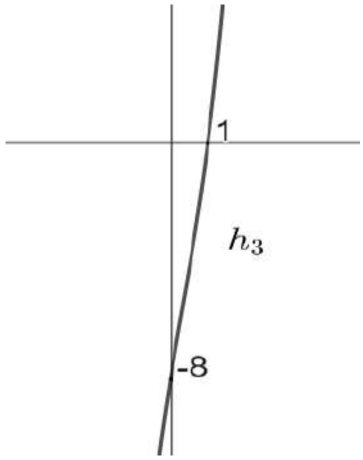
$h_1(x) = (x-1)x(x-1)$

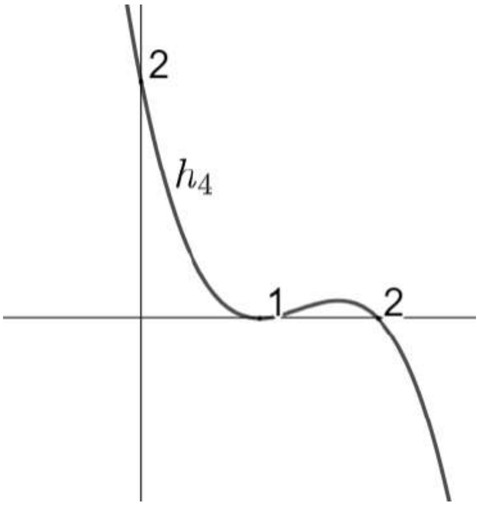
Por ejemplo, $h_2(x) = (x-1)(-2x-4)(x-2)$
$h_3(x)$ No es posible
Por ejemplo, $h_4(x) = (x-1)(x-2)(-x+1)$

c)









20.

a) Hay varias posibilidades

$$a(x+1)^3(x-2); a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)(x-2)^3; a \in R; a \neq 0$$

$$a(x+1)^2(x-2)^2; a \in R; a \neq 0$$

b) Hay infinitas posibilidades: a(x+1)(x-2)(x-h)(x-k) con h y k reales, a real no nulo.

21. $a)\ P(x) = -\frac{1}{4}x^5.(x+1)^3$ b) $P(x) = \frac{3}{8}(x+2).(x-1)^2(x^2+1)$ por ejemplo

22.
$-3/16(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$, hay infinitas posibilidades porque el último factor, si bien tiene que ser un polinomio sin raíces reales, puede elegirse en forma diversa.
La otra raíz se halla igualando a cero el último cociente: x=-4

23. $P(x) = -2(x+7).(x-1)^2$ $a = -2 \ \ y\, m = -1$

24. a) $f(x) = 1/2(x-2)^2(x-4)^2$
b) $f(x) = (x+3)^2(x-1)$
c) $f(x) = \frac{1}{18}.(x+5).(x+1)(x-3)^2.(x-4)$
d) $f(x) = \frac{1}{90}.x^3.(x+3)$ o $f(x) = \frac{1}{90}.x.(x+3).(x-4)^2$
e) Por ejemplo: $f(x) = -\frac{5}{2}.(x^2+1).(x^2+2)$

25.
a) $2(x^3+2)$

b) $(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)$

c) $-4\left(x-\sqrt{6}/2\right)^2\left(x+\sqrt{6}/2\right)^2$

d) $\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)(x^2+8)$

e) $(x+1)^2(x*1)^4$

f) $8x(x-1/2)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}$

g) $(x-3)(x+3)(x-1)^2$

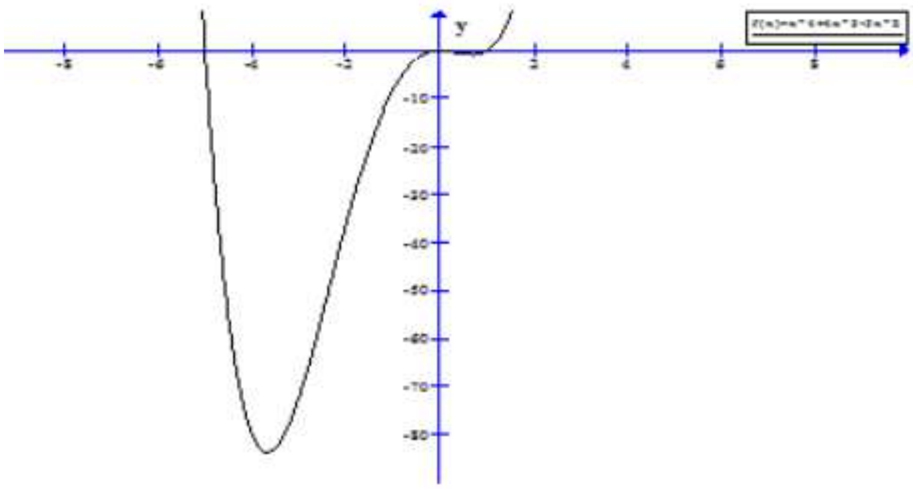
h) $(x^4+3)(x-2)$

i) $2/3(x+1/2)(x+1/4)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

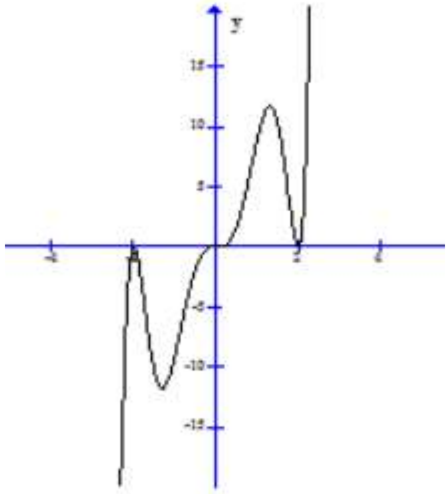
j) $3(x-2)(x+2)(x-1/3)$

k) $1/2(x-2)(x+2)(x-1)(x^2+4)$

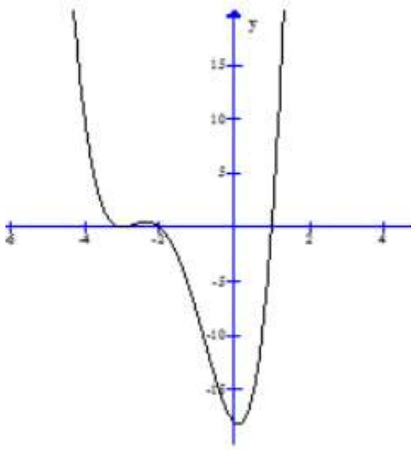
26.a)
Ceros: 0, raíz doble 1 y -5 raíces simples
La gráfica "rebota" en 0 y "atraviesa" el eje x en -5 y 1.



b) Ceros: 0 raíz triple
2 y -2 raíces dobles
La gráfica "rebota" en -2 y 2 y "atraviesa" el eje x en 0.

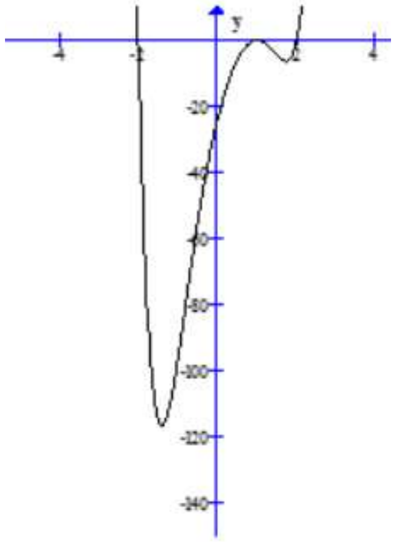


c) Ceros: -3 raíz doble
1 y 2 raíces simples
La gráfica "rebota" en -3 y "atraviesa" el eje x en -2 y 1.



d) Ceros: 1 raíz doble
2 y -2 raíces simples
Hay dos raíces no reales

La gráfica “rebora” en 1 y “atraviesa” el eje x en -2 y 2.



27. b) Las funciones son respectivamente:
No inyectiva, no sobreyectiva, Inyectiva, no sobreyectiva, No es función
c) Los conjuntos A y B no son únicos, una posibilidad es: A = R_0^+ B = [-4; +∞)

28. Son funciones i) ii) iv) v) . i) y iv) son sobreyectivas pero no inyectivas; ii) es biyectiva; v) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

29. a) a.1) por ejemplo f (1) = 3 ; f (2) = 3; f (3) = 7
a.2) imposible.

b) No, porque no puede definirse una función inyectiva.

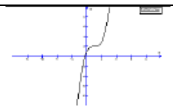
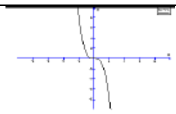
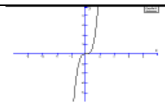
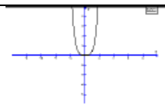
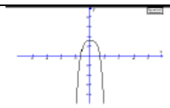
c) Ambos conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos.

30. Biyectiva. $f^{-1}:[2,+\infty)\rightarrow \Re_0^+ / f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

31. Biyectiva. $f^{-1}:\Re\rightarrow\Re / f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

32. Sea f definida en R.

	C^0	C^+	C^-	gráfico	par	impar	imagen
a	$\{-\sqrt[3]{2}\}$	$(-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
b	$\{-2\}$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;-2)$		No	No	R

c	$\{1-\sqrt[3]{2}\}$	$(1-\sqrt[3]{2};+\infty)$	$(-\infty;1-\sqrt[3]{2})$		No	No	R
d	$\{0\}$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$		No	Si	R
e	$\{0\}$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$		No	Si	R
f	$\{0\}$	$R-\{0\}$	ϕ		Si	No	[0;+oo)
g	$\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\}$	$(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3})$	$(-\infty;-\sqrt[4]{3})\cup(\sqrt[4]{3};+\infty)$		Si	No	(-oo;3]

UNIDAD 4

1. a) R – { 1}, no tiene ceros

   b) R – {-3, 3} , no tiene ceros

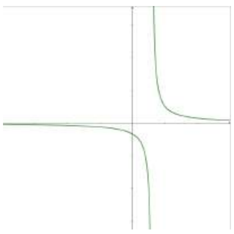
   c) R – {-2, 1/3, 2} , no tiene ceros

2.

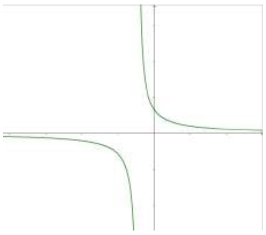
	Dominio	Imagen	Ceros	F. Canónica	Asíntotas
a)	R –{-3/2}	R-{2}	1/4	$y=\frac{-\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}}+2$	AV: x= -3/2 AH: y=2
b)	R-{2}	{1/5}	No tiene		
c)	R-{-2,2}	R-{0, ¼}	No tiene	y= $\frac{1}{x+2}\ \forall x\neq 2, x\neq -2$	AV: x= -2 AH: y=0

d)	R-{10}	R-{1/2}	-8	y=$\frac{-1}{x+10}+\frac{1}{2}$	AV: x= -10 AH: y=1/2
e)	R-{0}	R-{2}	-13/2	$y=\frac{13}{x}+2$	AV: x= 0 AH: y=2
f)	R-{1}	R-{2}	-1		
g)	R-{1}	$\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$	No tiene		

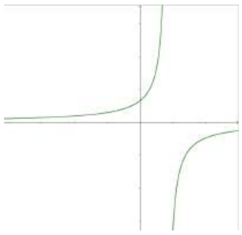
3.



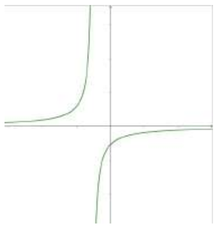
h(x)



m(x)



f(x)



g(x)

4. $f(x)=\frac{2x-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}$

5.

	Ceros	F. Canónica	Asíntotas	Int de Posit.	Creciente
a)	-1/2	$y=-2+\frac{11}{5-x}$	AV: x= 5	$\left(-\frac{1}{2};5\right)$	(-∞;5) y (5;+∞)

			AH: y=-2		
b)	-3/2	$y=-2-\dfrac{5}{x-1}$	AV: x= 1 AH: y=-2	$\left(-\dfrac{3}{2},1\right)$	(-∞;1) y (1;+∞)

6. a) $k=-\frac{3}{2}$ b) $k=\frac{3}{2}$ c) $k=\frac{3}{4}$ d) $k=-\frac{15}{2}$

7. a) F; b) V; c) V; d) V; e) F

8. a) $f(x)=\frac{5}{x-2}-1$; $f(0)=-\frac{7}{2}$; $x=7$

   b) $f(x)=\frac{-6}{x+2}+\frac{3}{2}$; $f(0)=-\frac{3}{2}$; $x=2$

9. A: R –{ 1} B: R –{2}, $f(x)=2+\dfrac{2}{x-1}$ $f^{-1}; R-\{2\}\rightarrow R-\{1\} / f^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-2}+1$

10. $D_F : R$ $I_f : (-\infty,1]$ No sobreyectiva, no inyectiva

12. Al trascurrir el tiempo tendiendo a infinito la concentración tiende a 0,10, aunque nunca alcanza ese valor.

13. a) $w(7{,}9)\cong 26{,}58$; $w(9{,}5)\cong 5{,}26$; $w(10)=0$

    b) $s=5$; $s=\frac{20}{3}$; $s=\frac{2000}{199}$

    c) Dom=[5;10] Im=[0;100]

14.

Capacidad de c/botella (l)	Cant. total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	120
2	60	120
3	40	120
5	24	120
1/2	240	120

3/2	80	120

$$C(k) = \frac{120}{k}$$

15. a) 0 $x \neq -1$

d) $\frac{1}{5x+9}$ $x \neq 1; -3; 9/5; -9/5$

b) $\frac{2}{x+2}$ $x \neq 2$ $x \neq -2$

e) $\frac{7+x}{-2}$ $x \neq 7, -7;$ $\frac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$

c) $\frac{x-1}{x}$ $x \neq 1$

f) $x^2 - 3x + 2$ $x \neq -2; -1; 0; 1; 2$

16. $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+1}$

17. a) A=2/3 B=7/3 b) A= 2 y B=1

18. a) $\frac{0.5}{x-1} + \frac{0.5}{x+1}$ b) $2 + \frac{5}{x-2}$

c) $x^2 + 1 - \frac{0.5}{x+1} + \frac{0.5}{x-1}$ d) $x^3 - x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$

19.
$a) S = \{-3;18\}$
$b) S = \{-2\}$
$c) S = \{2,6\}$

20. a) $S = \{(0,-3)\ (5;2)\}$ b) $S = \{(-1,1)\ (-5;3)\}$ c) $S = \{(-2,-1)\}$

21.

a) Dominio máximo reales positivos con el cero, cero : x= 0. Conjunto Imagen; reales negativos con el cero, no es biyectiva $f^{-1} : \Re_0^- \to \Re_0^+ / f^{-1}(x) = x^2$

b) Dominio máximo reales mayores o iguales que 1, cero: x= 1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva $f^{-1} : \Re_0^+ \to [1,+\infty) / f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c) Dominio máximo reales mayores o iguales que -1, cero: x= -1. Conjunto Imagen; reales positivos con el cero no es biyectiva: $f^{-1} : \Re_0^+ \to [-1,+\infty) / f^{-1}(x) = x^2 - 1$

22.

Dominio maximo: [-1:1]; Imagen [0;1], No es biyectiva restricción para que lo sea Dom:[0;1],Im:[0;1]

$f^{-1} : [0;1] \to [0;1] / f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$

23. Dominio máximo: R

Imagen $\left[1,+\infty\right)$, no tiene ceros. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom: $^{+}_{0}$ e Im: $\left[1,+\infty\right)$

$f^{-1}:[1,+\infty)\rightarrow \ ^{+}_{0}\ /f^{-1}(x)=x^{2}-1$

La f es creciente y positiva en todo su dominio

24. Es biyectiva. $f^{-1}: R \rightarrow R / f^{-1}(x) = x^{3} + 1$

25. Cero: x=2,

Imagen $\left[0,+\infty\right)$. No es biyectiva restricción para que lo sea Dom: $\left[2,+\infty\right)$ Imagen $\left[0,+\infty\right)$.

$f^{-1}:\Re_{0}^{+}\rightarrow\left[2,+\infty\right)\ /f^{-1}(x)=x^{2}+2$

26.
$a)\ S=\{-3\}$
$b) S=\{9\}$
$c) S=\{-3,3\}$
$d) S=\{4,-4\}$
$e) S=\{3\}$

UNIDAD 5

1) a) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_{0}^{+} \qquad Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f+g(x)=x^{2}+2x-1; Dom=R; \operatorname{Im}=\left[-2;+\infty\right)$
- $f\cdot g(x)=2x^{3}-x^{2}; Dom=R; \operatorname{Im}=R$
- $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{x^{2}}{2x-1}; Dom=R-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}; \operatorname{Im}=R$

b) $Domf = R; \operatorname{Im} f = R_{0}^{+} \qquad Domg = R_{0}^{+}; \operatorname{Im} g = R_{0}^{+}$

- $f+g(x)=x^{2}+\sqrt{x}; Dom=R_{0}^{+}; \operatorname{Im}=R_{0}^{+}$
- $f\cdot g(x)=x^{2}\cdot\sqrt{x}; Dom=R_{0}^{+}; \operatorname{Im}=R_{0}^{+}$
- $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x}}; Dom=R^{+}; \operatorname{Im}=R^{+}$

c) $Domf = R-\{2\}; \operatorname{Im} f = R-\{0\} \qquad Domg = R; \operatorname{Im} g = R$

- $f+g(x)=\dfrac{3x^{2}-4x-3}{x-2}; Dom=R-\{2\}; \operatorname{Im}=R$
- $f\cdot g(x)=\dfrac{8}{x-2}+3; Dom=R-\{2\}; \operatorname{Im}=R-\{3\}$

- $\frac{f}{g}(x)=\frac{1}{(x-2)(3x+2)};Dom=R-\left\{2;-\frac{2}{3}\right\};\mathrm{Im}=R-\{0\}$

2) a) 0 b) 0 c) -1 d) no existe e) $f\circ g(x)=\sqrt{x^2-1}$ f) $g\circ f(x)=x-1$

3) a) $f\circ g(x)=(2x-1)^2;Dom=R;\mathrm{Im}=R_0^+$

Para $g\circ f$ debemos restringir $Domg=R_0^+$

$g\circ f(x)=2x^2-1;Dom=R;\mathrm{Im}=[-1;+\infty)$

b) Para $f\circ g$ debemos restringir $Domf=R_0^+$

$f\circ g(x)=x;Dom=R_0^+;\mathrm{Im}=R_0^+$ $g\circ f(x)=|x|;Dom=R;\mathrm{Im}=R_0^+$

c) $f\circ g(x)=\frac{1}{3x};Dom=R-\{0\};\mathrm{Im}=R-\{0\}$

$g\circ f(x)=\frac{3}{x-2}+2;Dom=R-\{2\};\mathrm{Im}=R-\{2\}$

4) g:R→R/ g(x)= $\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$

5) a) $f:R_0^+\to R_0^+/f(t)=1+\frac{1}{10}t$

b) $V:R_0^+\to R_0^+/V(t)=\frac{4}{3}\pi(1+\frac{1}{10}t)^3$ $V(3)=\frac{13^3}{750}\pi$

6) a) $Domf=R;\mathrm{Im}f=[2;+\infty);f^{-1}:[2;+\infty)\to[0;+\infty)/f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$

$f\circ f^{-1}:[2;+\infty)\to[2;+\infty)$ $f^{-1}\circ f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$

b) $Domf=R;\mathrm{Im}f=R;f^{-1}:R\to R/f^{-1}(x)=x^3+3$

$f\circ f^{-1}:R\to R$ $f^{-1}\circ f:R\to R$

c) $Domf=R-\{3\};\mathrm{Im}f=R-\{2\};f^{-1}:R-\{2\}\to R-\{3\}/f^{-1}(x)=\frac{5}{x-2}+3$

$f\circ f^{-1}:R-\{2\}\to R-\{2\}$ $f^{-1}\circ f:R-\{3\}\to R-\{3\}$

7)a) VERDADERO

Para demostrar la inyectividad de $g \circ f$ partiendo de $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ debemos inferir que $x_1 = x_2$

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ por ser g inyectiva.

Como f es inyectiva se puede inferir la igualdad de las abscisas:

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo cual la composición de funciones inyectivas, es inyectiva.

b) FALSO

Para que la composición $g \circ f$ sea posible, se debe verificar que $\operatorname{Im} f \subset Domg$.

Si la inclusión es estricta existe al menos un elemento del dominio de g, que no pertenece a la imagen de f: $x_0 \in oDomg / x_0 \notin \operatorname{Im} f$, dicho de otro modo, x_0 nunca será alcanzado por f. Entonces $y_0 = g(x_0) \notin \operatorname{Im} f \circ g$.

Por lo tanto, aunque las dos funciones sean sobreyectivas, la composición no siempre lo es.